代数と幾何　例題

問1.　以下の命題(1)-(8)についてそれぞれ真偽を答えよ．理由は書かなくても良いが、書いた場合は加点の対象とする．

(1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ であれば必ず、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立である．

(2) $A(\vec{a})$と$C(\vec{c})$ を直径の両端にもつ円周上の点 $P(\vec{p})$ は$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=0$ というベクトル方程式を満たす．

(3) 三角形をなす三点 $A,\ B,\ C$ があり、$\angle ABC$の二等分線上の点 P について、ある実数 t が存在し、$\overrightarrow{AP}=t(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ が成立する．

(4) 点 O が中心の円周上に三点 $A,\ B,\ C$ があり、$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ が成立していれば、三角形 ABC は正三角形である．

(5) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ とすれば、$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ かつ $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ が成立する．

(6) $\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0},\ \vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ であれば $|\vec{c}|$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす平行四辺形の面積に等しい．

(7) 三次元座標空間上の始点が等しい $\vec{a},\vec{b}$ がなす三角形の面積は $\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ で求めることができる．

(8) 三次元上の一次独立でない三つの始点が同じベクトル $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ がなす四面体の体積は $\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$ で求めることができる．

問2.　三角形 ABC において $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ が成立しているならば三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ．

問3.　点$A(0,0,-11)$ を通り、$\vec{n}=(2,3,-1)$ に垂直な平面αと、α に関して同じ側にある 2 点$P(1,1,1),\ Q(-1,0,-6)$がある．次の問に答えよ．

(1) 平面αに関して点Pと対称な点を求めよ．

(2) $PX+QX$ が最小となるように平面α上の点X を求めよ．

問4.　三角形をなす三点 $O,\ A,\ B$ がある．このとき、各設問に答えよ．

(1) 実数 s,t が $-1\leq s\leq 0, 0\leq t\leq 1$ を動くとき、$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ と定めれば、点P はどのような領域を動くか、三点 $O,\ A,\ B$ を使って図示せよ．

(2) 実数 s,t が $0\leq s, 0\leq t, s+2t\leq 2$ を動くとき、$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ と定めれば、点Q はどのような領域を動くか、三点 $O,\ A,\ B$ を使って図示せよ．

(3) 実数 s,t が $0 \leq s, 0 \leq t, s+t \leq 3$ を動くとき、$\overrightarrow{OR} = (2s+t)\overrightarrow{OA} + (s-2t)\overrightarrow{OB}$ と定めれば、点R はどのような領域を動くか、三点 O, A, B を使って図示せよ.

(4) 実数 s,t が $0 \leq s, 0 \leq t, s+2t \leq 2$ を動くとき、$\overrightarrow{OS} = (2s+t)\overrightarrow{OA} + (s-2t)\overrightarrow{OB}$ と定めれば、点S はどのような領域を動くか、三点 O, A, B を使って図示せよ.

問5. 次の命題をそれぞれ証明せよ.

(1) 二次元平面において、直線 L: $ax+by+c=0$ と点$P(p,q)$ の距離 x は

$$x = \frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

ただし $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする.

(2) 三次元空間において、平面 α: $ax+by+cz+d=0$ と点$P(p,q,r)$ の距離 y は

$$y = \frac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ただし $a \neq 0$, $b \neq 0$ または $c \neq 0$ とする.

代数と幾何　例題の解答例

問1.

(1) 偽．さらに一次独立であるためには「$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない」とう条件が必要.

(2) 真．P は A または C と一致するか、円周角の定理より $AP \perp CP$．したがって、$\overrightarrow{AP}=\vec{0}$, $\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CP} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CP}=0 \Leftrightarrow (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=0$ が成立.

(3) 偽．$|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ のときは成立しない．たとえば $\overrightarrow{AB}=\binom{1}{0}$, $\overrightarrow{AC}=\binom{0}{2}$ のとき.

(4) 真．$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ であるから、$|\overrightarrow{OA}|=|-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$

特に、$|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2$ ．ここで内積の計算と $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ に注意すると、$|\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OA}|^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}|^2=-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ が成立して、同様にすれば、$|\overrightarrow{OB}|^2=-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$, $|\overrightarrow{OC}|^2=-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$ なので、先と合わせれば結局、

$$|\overrightarrow{OA}|^2=-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}|^2=-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OC}|^2=-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$$

が成立するので、

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=3|\overrightarrow{OA}|^2$$
$$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2=3|\overrightarrow{OA}|^2$$
$$|\overrightarrow{CA}|^2=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+|\overrightarrow{OC}|^2=3|\overrightarrow{OA}|^2$$

であるから、$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{CA}|$ となるから三角形ABCは正三角形.

(5) 真．$\vec{a}=(a_1\ a_2\ a_3)$, $\vec{b}=(b_1\ b_2\ b_3)$ とすると、

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2\ a_3b_1-a_1b_3\ a_1b_2-a_2b_1)$$

すると、内積はそれぞれ

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$
$$\vec{b}\cdot\vec{c}=b_1(a_2b_3-a_3b_2)+b_2(a_3b_1-a_1b_3)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

(6) 真．(5)と同様に文字を置く．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす平行四辺形の面積を S とすれば、(7)が正しいので、面積の二乗は

$$S^2=\left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=({a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2)\left({b_1}^2+{b_2}^2+{b_3}^2\right)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$
$$={a_1}^2\left({b_2}^2+{b_3}^2\right)+{a_2}^2\left({b_1}^2+{b_3}^2\right)+{a_3}^2\left({b_1}^2+{b_2}^2\right)-2a_1b_1a_2b_2-2a_2b_2a_3b_3-2a_3b_3a_1b_1$$
$$=(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=|\vec{c}|^2$$

$S\geq 0, |\vec{c}|\geq 0$ であるから、結局 $S=|\vec{c}|$.

(7) 真．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする．($0°\leq\theta\leq 180°$として一般性を失わない．)

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-(\cos\theta)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2-(|\vec{a}||\vec{b}|)^2(\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

となるので確かに成立．上で、$0°\leq\theta\leq 180°$ なので $\sin\theta\geq 0$ に注意した.

(8) 真．始点を O として、$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ となるように三点 A, B, C をとる．C から三角形OAB に垂線を下ろし、足を H とすると、$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{OB}$ であるから、$\overrightarrow{CH}//(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})$ ．特に、$\overrightarrow{CH}//(\vec{a}\times\vec{b})$ が成立．したがって、$\overrightarrow{CH}$ と $\overrightarrow{OC}$ のなす角を θ と

すると、$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ のなす角も θ. 一方、$|\overrightarrow{CH}|=\left||\overrightarrow{OC}|\cos\theta\right|=\left||\vec{c}|\cos\theta\right|$. また、(6)を用いると、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす平行四辺形の面積 S は $S=\left|(\vec{a}\times\vec{b})\right|$. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす三角形の面積はこの半分であることに注意すると、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ がなす四面体の体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S\right)|\overrightarrow{CH}|=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\right|\left||\vec{c}|\cos\theta\right|=\frac{1}{6}\left|\left|(\vec{a}\times\vec{b})\right||\vec{c}|\cos\theta\right|=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$$

(注意)

もし、(3) で $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ であれば成立する. 特に、「$\overrightarrow{AP}=t(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$ が成立するような実数 t が存在」という命題であれば、正しい. 実際、$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ とすれば、これは $\overrightarrow{AB}$ に平行な単位ベクトル. また、$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ とすれば、これは $\overrightarrow{AC}$ に平行な単位ベクトル. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ とすれば $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$.
さらに $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}$. したがって $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$ となるので四角形$AEFD$ は菱形. 三角形AEF と三角形ADF は合同となり$\angle DAF=\angle EAF$ で AF は $\angle DAE$ 特に $\angle BAC$ の二等分線なので $\overrightarrow{AF}//\overrightarrow{AP}$ であるから $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AF}=t(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$ が成立するような実数 t が存在.

問2.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{AC})=(-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-|\overrightarrow{AB}|^2=-|\overrightarrow{AC}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}|^2=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2$
以上の式から、$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$. $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2$ から、$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2\Leftrightarrow|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}|$. 結局、$|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ となるから三角形ABC は正三角形.

問3.

(1) 求める点を R とする. また、P から平面αに垂線を下ろし、足を H とすると $\overrightarrow{PR}=2\overrightarrow{PH}$. まず、平面$\alpha$は点$A(0,0,-11)$ を通り、法線ベクトルが $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ であるから、式は、$2(x-0)+3(y-0)+(-1)(z-(-11))=0\Leftrightarrow 2x+3y-z-11=0$. 一方、$\overrightarrow{PH}//\vec{n}$ であるから、ある実数 t が存在し、 $\overrightarrow{PH}=t\vec{n}$. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PH}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\1+3t\\1-t\end{pmatrix}$. Hの座標は $H(1+2t,1+3t,1-t)$ であり、平面α上であるから、$2(1+2t)+3(1+3t)-(1-t)-11=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$. よって $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OP}+2t\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$.

ここから、$R(3,4,0)$

(2) 求める点を S とすると R,S,Q が同一直線上. $\overrightarrow{QS}//\overrightarrow{QR}$ であるから、ある実数 s が存在し、 $\overrightarrow{QS}=s\overrightarrow{QR}$. $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{OQ}+s\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+4s\\4s\\-6+6s\end{pmatrix}$. Sの座標は平面 α 上であり、 $S(-1+4s,4s,-6+6s)$ であるから、$2(-1+4s)+3(4s)-(-6+6s)-11=0 \Leftrightarrow s=\frac{1}{2}$. ここから $S(1,2,-3)$.

問4.

(1) $0\leq t\leq 1$ を満たすような t をとり、$\overrightarrow{OB_t}=t\overrightarrow{OB}$ とおく. $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_t}$ であるから、$\overrightarrow{OA_t}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_t}$ とすると先の式と $-1\leq s\leq 0$ より点Pは線分A_tB_t上. 求める領域は平行四辺形 OA_0A_1B 内.

(2) $0\leq s,0\leq t$ であるから、$s+2t=k$ とすると $0\leq k\leq 2$.

（ｉ）$k=0$ のとき $0\leq s,0\leq t$ であるから $s=t=0$. $\overrightarrow{OQ}=\vec{0}$ となり、Q は O を表す.

（ⅱ）$k\neq 0$ のとき $0\leq s,0\leq t,s+2t=k(>0) \Leftrightarrow 0\leq\frac{s}{k},0\leq\frac{2t}{k},\frac{s}{k}+\frac{2t}{k}=1$ であるから、

$$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{s}{k}\left(k\overrightarrow{OA}\right)+\frac{2t}{k}\left(\frac{k}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{s}{k}\left(\overrightarrow{OA_k}\right)+\frac{2t}{k}\left(\overrightarrow{OB_k}\right)$$

ここで $\overrightarrow{OA_k}=k\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB_k}=\frac{k}{2}\overrightarrow{OB}$ とした. すると $0\leq\frac{s}{k},0\leq\frac{2t}{k},\frac{s}{k}+\frac{2t}{k}=1$ なので、Q は線分 A_kB_k 上にある.

(3) $0\leq s,0\leq t$ であるから、$s+t=k$ とすると $0\leq k\leq 3$.

（ｉ）$k=0$ のとき $0\leq s,0\leq t$ であるから $s=t=0$. $\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ となり、R は O を表す.

（ⅱ）$k\neq 0$ のとき $0\leq s,0\leq t,s+t=k(>0) \Leftrightarrow 0\leq\frac{s}{k},0\leq\frac{t}{k},\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$ である.

$$\overrightarrow{OR}=(2s+t)\overrightarrow{OA}+(s-2t)\overrightarrow{OB}=s\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+t\left(\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right)$$

ここで $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすれば、

$$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}=\frac{s}{k}\left(k\overrightarrow{OC}\right)+\frac{t}{k}\left(k\overrightarrow{OD}\right)=\frac{s}{k}\left(\overrightarrow{OC_k}\right)+\frac{t}{k}\left(\overrightarrow{OD_k}\right)$$

ここで $\overrightarrow{OC_k}=k\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD_k}=k\overrightarrow{OD}$ とした. すると $0\leq\frac{s}{k},0\leq\frac{t}{k},\frac{s}{k}+\frac{t}{k}=1$ なので、R は線分 C_kD_k 上にある.

(4) $0\leq s,0\leq t$ であるから、$s+2t=k$ とすると $0\leq k\leq 2$.

（ｉ）$k=0$ のとき $0\leq s,0\leq t$ であるから $s=t=0$. $\overrightarrow{OS}=\vec{0}$ となり、S は O を表す.

（ⅱ）$k\neq 0$ のとき $0\leq s,0\leq t,s+2t=k(>0) \Leftrightarrow 0\leq\frac{s}{k},0\leq\frac{2t}{k},\frac{s}{k}+\frac{2t}{k}=1$ である.

$$\overrightarrow{OS}=(2s+t)\overrightarrow{OA}+(s-2t)\overrightarrow{OB}=s\left(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+t\left(\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\right)$$

ここで $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすれば、

$$\overrightarrow{OS}=s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}=\frac{s}{k}\left(k\overrightarrow{OC}\right)+\frac{2t}{k}\left(\frac{k}{2}\overrightarrow{OD}\right)=\frac{s}{k}\left(\overrightarrow{OC_k}\right)+\frac{2t}{k}\left(\overrightarrow{OD_k}\right)$$

ここで $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD_k}=\frac{k}{2}\overrightarrow{OD}$ とした. すると $0\leq\frac{s}{k},0\leq\frac{2t}{k},\frac{s}{k}+\frac{2t}{k}=1$ なので、S は線分 C_kD_k 上にある.

問5.

(1) 直線 L の法線ベクトルの一つとして $\vec{n}=\binom{a}{b}$ がとれる．$P(p,q)$ から直線 L に垂線を下ろし、足をH とすると$\overrightarrow{PH}//\vec{n}$ であるから、ある実数 t が存在し、 $\overrightarrow{PH}=t\vec{n}.$

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PH}=\binom{p}{q}+t\binom{a}{b}=\binom{p+ta}{q+tb}$$

となるので $H(p+ta,q+tb)$ である．H は平面α: $ax+by+c=0$ 上にあり

$a(p+ta)+b(q+tb)+c=0 \Leftrightarrow t(a^2+b^2)=-(ap+bq+c)\Leftrightarrow t=\frac{-(ap+bq+c)}{a^2+b^2}$

($a\neq 0$ または $b\neq 0$ であるから $a^2+b^2\neq 0$)

求める距離 x は

$$x=\left|\overrightarrow{PH}\right|=|t\vec{n}|=|t||\vec{n}|=\left|\frac{-(ap+bq+c)}{a^2+b^2}\right|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(2) 平面α の法線ベクトルの一つとして $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ がとれる．$P(p,q,r)$ から平面α に垂線を下ろし、足をH とすると$\overrightarrow{PH}//\vec{n}$ であるから、ある実数 t が存在し、 $\overrightarrow{PH}=t\vec{n}.$

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PH}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+ta\\q+tb\\r+tc\end{pmatrix}$$

となるので $H(p+ta,q+tb,r+tc)$ である．H は平面α: $ax+by+cz+d=0$ 上にあり

$a(p+ta)+b(q+tb)+c(r+tc)+d=0 \Leftrightarrow t(a^2+b^2+c^2)=-(ap+bq+cr+d)$

$\Leftrightarrow t=\frac{-(ap+bq+cr+d)}{a^2+b^2+c^2}$ ($a\neq 0,\ b\neq 0$ または $c\neq 0$ であるから $a^2+b^2+c^2\neq 0$)

求める距離 y は

$$y=\left|\overrightarrow{PH}\right|=|t\vec{n}|=|t||\vec{n}|=\left|\frac{-(ap+bq+cr+d)}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$