代数と幾何　試験問題

問1.　以下の命題(1)-(4)についてそれぞれ真偽を答えよ．理由は書かなくても良いが、書いた場合は加点の対象とする．

(1) $\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないならば必ず、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立である．

(2) 点 O が中心の円周上に三点 A, B, C があり、$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ が成立していても、三角形 ABC は正三角形とは限らない．

(3) 二次元座標空間上の始点が等しい $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ がなす三角形の面積は $\frac{1}{2}|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ で求めることができる．

(4) 三次元空間において、平面 α: $ax + by + cz + d = 0$ と点$P(p, q, r)$ の距離 y は

$y = \frac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ で求めることができる．

問2.　三角形 ABC において $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -9\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$ が成立しているならば三角形ABC は辺の長さが 2:2:3 の二等辺三角形であることを証明せよ．

問3.　点$A(0, 0, -11)$ を通り、$\vec{n} = (2, 3, -1)$ に垂直な平面αと、α に関して同じ側にある 2 点$P(1, 1, 1)$, $Q(-1, 0, -6)$がある．次の問に答えよ．

(1) 平面αに関して点Pと対称な点を求めよ．

(2) $PX + QX$ が最小となるように平面α上の点X を求めよ．

問4.　三角形をなす三点 O, A, B がある．このとき、各設問に答えよ．

(1) 実数 s, t が $-1 \leq s \leq 0, 0 \leq t \leq 1$ を動くとき、$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ と定めれば、点P はどのような領域を動くか、三点 O, A, B を使って図示せよ．

(2) 実数 s, t が $0 \leq s, 0 \leq t, s + 2t \leq 2$ を動くとき、$\overrightarrow{OQ} = (2s + t)\overrightarrow{OA} + (s - 2t)\overrightarrow{OB}$ と定めれば、点Q はどのような領域を動くか、三点 O, A, B を使って図示せよ．

問5.　三角形をなす三点 A, B, C があり、$\angle ABC$の二等分線上の点 P について、ある実数 t が存在し、$\overrightarrow{AP} = t(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$ が成立する．

(次の問題は<u>解かなくても良いが解いた場合は加点対象</u>とする．)

問6.　次の命題をそれぞれ証明せよ．

(1) 三次元座標空間上の始点が等しい $\vec{a}, \vec{b}$ がなす三角形の面積は $\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$ で求めることができる．

(2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ とすれば、$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ かつ $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ が成立する．また、$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ であれば $|\vec{c}|$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす平行四辺形の面積に等しい．

(3) 三次元上の一次独立でない三つの始点が同じベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ がなす四面体の体積は $\frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ で求めることができる．

代数と幾何　試験問題の解答例

問1.

(1) 真．問題の通り．

(2) 偽．必ず、正三角形になる．$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ であるから、$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\right|$ $\Leftrightarrow$ $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|$ で、特に、$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|^2$ ．ここで内積の計算と $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$ に注意すると、$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2$ $\Leftrightarrow$ $\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ が成立して、同様にすれば $\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$, $\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$ なので、先と合わせれば結局、

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$$

が成立するので

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+\left|\overrightarrow{OA}\right|^2=3\left|\overrightarrow{OA}\right|^2$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=3\left|\overrightarrow{OA}\right|^2$$
$$\left|\overrightarrow{CA}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2=3\left|\overrightarrow{OA}\right|^2$$

であるから $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{CA}\right|^2$ $\Leftrightarrow$ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}\right|$ となり、三角形ABCは正三角形.

(3) 真．二次元座標空間上の始点が等しい $\vec{a},\vec{b}$ がなす三角形の面積は

$\frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{({a_1}^2+{a_2}^2)({b_1}^2+{b_2}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

(4) 真．平面α の法線ベクトルの一つとして $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ がとれる．$P(p,q,r)$ から平面α に垂線を下ろし、足をH とすると$\overrightarrow{PH}//\vec{n}$ であるから、ある実数 t が存在し、 $\overrightarrow{PH}=t\vec{n}$.

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PH}=\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p+ta\\q+tb\\r+tc\end{pmatrix}$$

となるので $H(p+ta,q+tb,r+tc)$ である．H は平面α: $ax+by+cz+d=0$ 上にあり

$a(p+ta)+b(q+tb)+c(r+tc)+d=0$ $\Leftrightarrow$ $t(a^2+b^2+c^2)=-(ap+bq+cr+d)$

$\Leftrightarrow$ $t=\frac{-(ap+bq+cr+d)}{a^2+b^2+c^2}$ ($a\neq 0,\ b\neq 0$ または $c\neq 0$ であるから $a^2+b^2+c^2\neq 0$)

求める距離 y は

$$y=\left|\overrightarrow{PH}\right|=|t\vec{n}|=|t||\vec{n}|=\left|\frac{-(ap+bq+cr+d)}{a^2+b^2+c^2}\right|\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\frac{|ap+bq+cr+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

問2.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-9\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{AC})=(-9)(-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=-\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ $\Leftrightarrow$ $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=-8\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$

以上の式から、$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2$ $\Leftrightarrow$ $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$. $\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\frac{9}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ から、$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=(\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|)^2$ $\Leftrightarrow$ $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\frac{3}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$. 結局、

$2|\overrightarrow{BC}|=3|\overrightarrow{AB}|=3|\overrightarrow{AC}|$ となるから三角形ABC は2:2:3 の二等辺三角形.
問3.
(1) 求める点を R とする．また、P から平面αに垂線を下ろし、足を H とすると $\overrightarrow{PR}=2\overrightarrow{PH}$. まず、平面$\alpha$は点$A(0,0,-11)$ を通り、法線ベクトルが $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ であるから、式は、$2(x-0)+3(y-0)+(-1)\bigl(z-(-11)\bigr)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-z-11=0$. 一方、$\overrightarrow{PH}//\vec{n}$ であるから、ある実数 t が存在し、 $\overrightarrow{PH}=t\vec{n}$. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PH}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2t\\1+3t\\1-t\end{pmatrix}$. Hの座標は $H(1+2t,1+3t,1-t)$ であり、平面α上であるから、$2(1+2t)+3(1+3t)-(1-t)-11=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$. よって $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{PH}=\overrightarrow{OP}+2t\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$.
ここから、$R(3,4,0)$
(2) 求める点を S とすると R,S,Q が同一直線上. $\overrightarrow{QS}//\overrightarrow{QR}$ であるから、ある実数 s が存在し、 $\overrightarrow{QS}=s\overrightarrow{QR}$. $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QS}=\overrightarrow{OQ}+s\overrightarrow{QR}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+4s\\4s\\-6+6s\end{pmatrix}$. Sの座標は平面α上であり、 $S(-1+4s,4s,-6+6s)$ であるから、$2(-1+4s)+3(4s)-(-6+6s)-11=0 \Leftrightarrow s=\frac{1}{2}$. ここから $S(1,2,-3)$.
問4.
(1) $0\leq t\leq 1$ を満たすような t をとり、$\overrightarrow{OB_t}=t\overrightarrow{OB}$ とおく. $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=s\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_t}$ であるから、$\overrightarrow{OA_t}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_t}$ とすると先の式と $-1\leq s\leq 0$ より点Pは線分A_tB_t上. 求める領域は平行四辺形 OA_0A_1B 内.
(2) $0\leq s, 0\leq t$ であるから、$s+2t=k$ とすると $0\leq k\leq 2$.
（ｉ）$k=0$ のとき $0\leq s,0\leq t$ であるから $s=t=0$. $\overrightarrow{OQ}=\vec{0}$ となり、Q は O を表す.
（ii）$k\neq 0$ のとき $0\leq s,0\leq t,s+2t=k(>0) \Leftrightarrow 0\leq \frac{s}{k},0\leq\frac{2t}{k},\frac{s}{k}+\frac{2t}{k}=1$ である.
$$\overrightarrow{OQ}=(2s+t)\overrightarrow{OA}+(s-2t)\overrightarrow{OB}=s\bigl(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\bigr)+t\bigl(\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}\bigr)$$
ここで $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすれば、
$$\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}=\frac{s}{k}\bigl(k\overrightarrow{OC}\bigr)+\frac{2t}{k}\left(\frac{k}{2}\overrightarrow{OD}\right)=\frac{s}{k}\bigl(\overrightarrow{OC_k}\bigr)+\frac{2t}{k}\bigl(\overrightarrow{OD_k}\bigr)$$
ここで $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD_k}=\frac{k}{2}\overrightarrow{OD}$ とした. すると $0\leq\frac{s}{k},0\leq\frac{2t}{k},s+2t=1$ なので、Q は線分 C_kD_k 上にある.
問5.
$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ とすれば、これは $\overrightarrow{AB}$ に平行な単位ベクトル. $\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ とすれば、これは $\overrightarrow{AC}$ に平行な単位ベクトル. $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ とすれば $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD}=\bigl(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\bigr)-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$. さらに $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\bigl(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\bigr)-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}$. したがって $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AE},\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$ となるの

で四角形$AEFD$ は菱形．三角形AEF と三角形ADF は合同となり$\angle DAF = \angle EAF$ で AF は $\angle DAE$ 特に $\angle BAC$ の二等分線なので $\overrightarrow{AF} // \overrightarrow{AP}$ であるから $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AF} = t(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$ が成立するような実数 t が存在.

問6.

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする．($0° \leq \theta \leq 180°$として一般性を失わない．)

$$S = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sqrt{1-(\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|)^2(\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|)^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

となるので確かに成立．上で、$0° \leq \theta \leq 180°$ なので $\sin\theta \geq 0$ に注意した.

(2) $\vec{a} = (a_1\ a_2\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1\ b_2\ b_3)$ とすると、

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2\ a_3b_1 - a_1b_3\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

すると、内積はそれぞれ

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = b_1(a_2b_3 - a_3b_2) + b_2(a_3b_1 - a_1b_3) + b_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす平行四辺形の面積を S とすれば、(7)が正しいので、面積の二乗は

$$S^2 = \left(|\vec{a}||\vec{b}|\right)^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2 = ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)\left({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2\right) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= {a_1}^2\left({b_2}^2 + {b_3}^2\right) + {a_2}^2\left({b_1}^2 + {b_3}^2\right) + {a_3}^2\left({b_1}^2 + {b_2}^2\right) - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_2b_2a_3b_3 - 2a_3b_3a_1b_1$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = |\vec{c}|^2$$

$S \geq 0, |\vec{c}| \geq 0$ であるから、結局 $S = |\vec{c}|$.

(3) 始点を O として、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ となるように三点 A, B, C をとる.

C から三角形OAB に垂線を下ろし、足を H とすると、$\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{OB}$ であるから、$\overrightarrow{CH} // (\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})$. 特に、 $\overrightarrow{CH} // (\vec{a}\times\vec{b})$ が成立．したがって、$\overrightarrow{CH}$ と $\overrightarrow{OC}$ のなす角を θ とすると、$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ のなす角も θ．一方、$|\overrightarrow{CH}| = \left||\overrightarrow{OC}|\cos\theta\right| = \left||\vec{c}|\cos\theta\right|$．また、(1),(2)を用いると、$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす平行四辺形の面積 S は $S = \left|(\vec{a}\times\vec{b})\right|$. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす三角形の面積はこの半分であることに注意すると、$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ がなす四面体の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}S\right)|\overrightarrow{CH}| = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\right|\left||\vec{c}|\cos\theta\right| = \frac{1}{6}\left|\left|(\vec{a}\times\vec{b})\right||\vec{c}|\cos\theta\right| = \frac{1}{6}\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$$