No.0001__「わかさ」の問題

―平面幾何、軌跡、三角関数、サイクロイド曲線、アステロイド曲線―

「わかさ生活【公式】」さんの動画を考察！！

参考動画：https://www.youtube.com/watch?v=vGQwbedLUbE

動画を観察！

（１）　小円が大円の中を**内接**しながら動く

（２）　点の**動いたあと（軌跡）**が直線…　**疑問①**

（３）　点が動く like a **振り子？**…　**疑問②**

（直線上を真ん中では速く動き、端では止まる）

疑問①　なぜ軌跡は直線？

～軌跡が直線であることを二等辺三角形や外角の性質を使って証明！～

参考資料：https://www.geogebra.org/m/jtp3myzd

問題を次のように数学的な問題に言い換える。

問題 1 大円の中心を O とする。 動き出す前の小円の中心を X_0 として、図のように点 P で大円に内接するとする。 小円が大円上を一回転動くときに、点 P が動く軌跡は直線であることを説明せよ。 **ただし、大円の半径は小円の半径の２倍であるとする。**

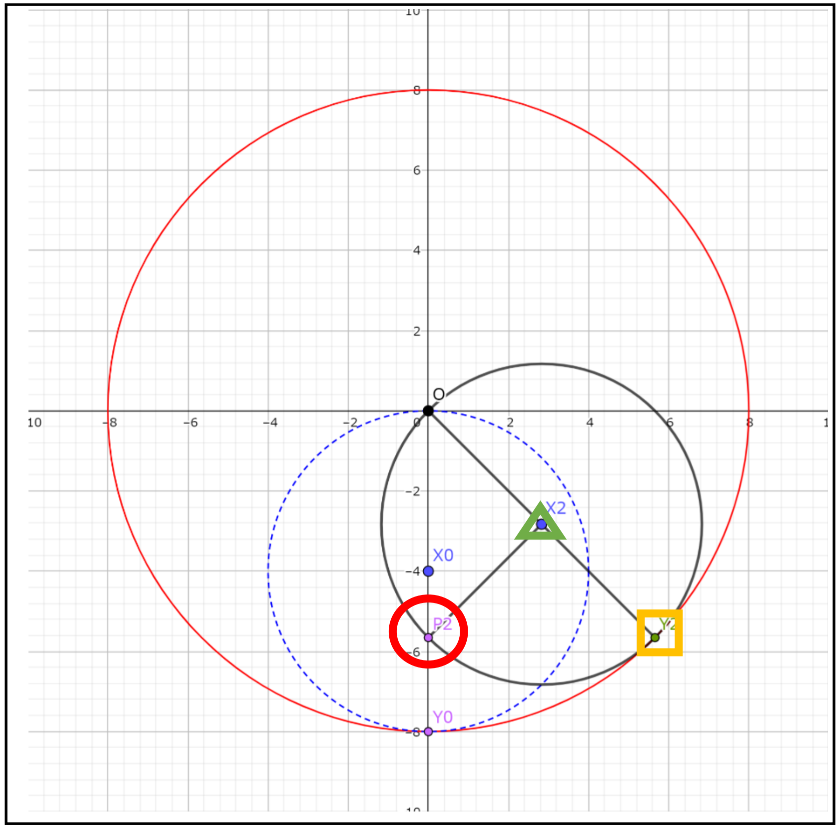
【図 1】

$\angle Y_2OY_0 = 45^\circ$ の場合

① 小円の中心：X_2

② 点 P が動く先：P_2

③ 大円と小円が内接している点：Y_2



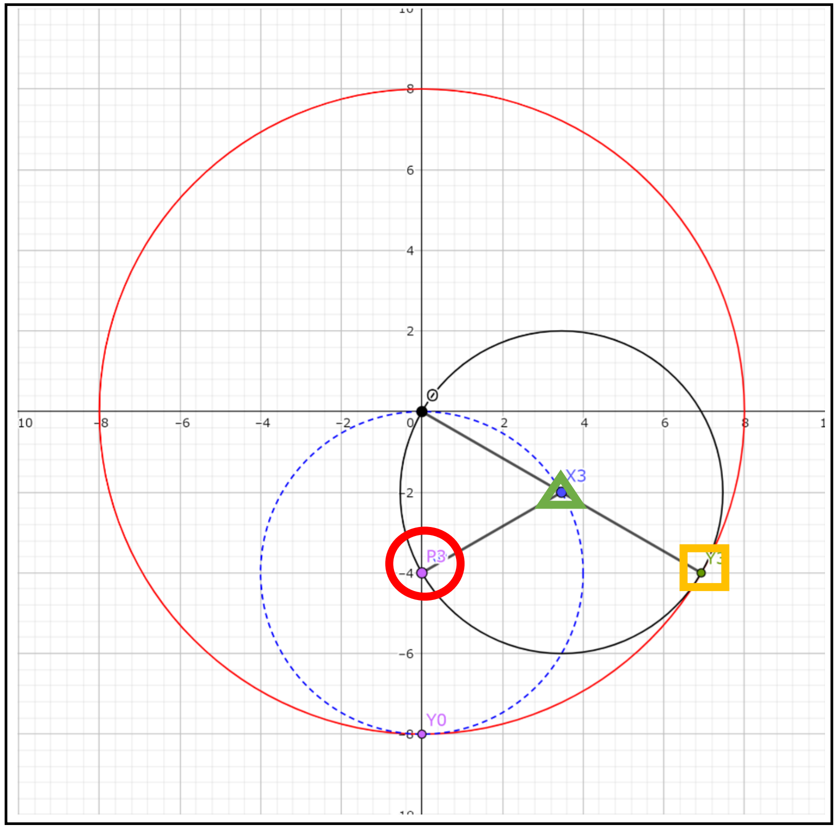
【図 2】

$\angle Y_3OY_0 = 60^\circ$ の場合

① 小円の中心：X_3

② 点 P が動く先：P_3

③ 大円と小円が内接している点：Y_3

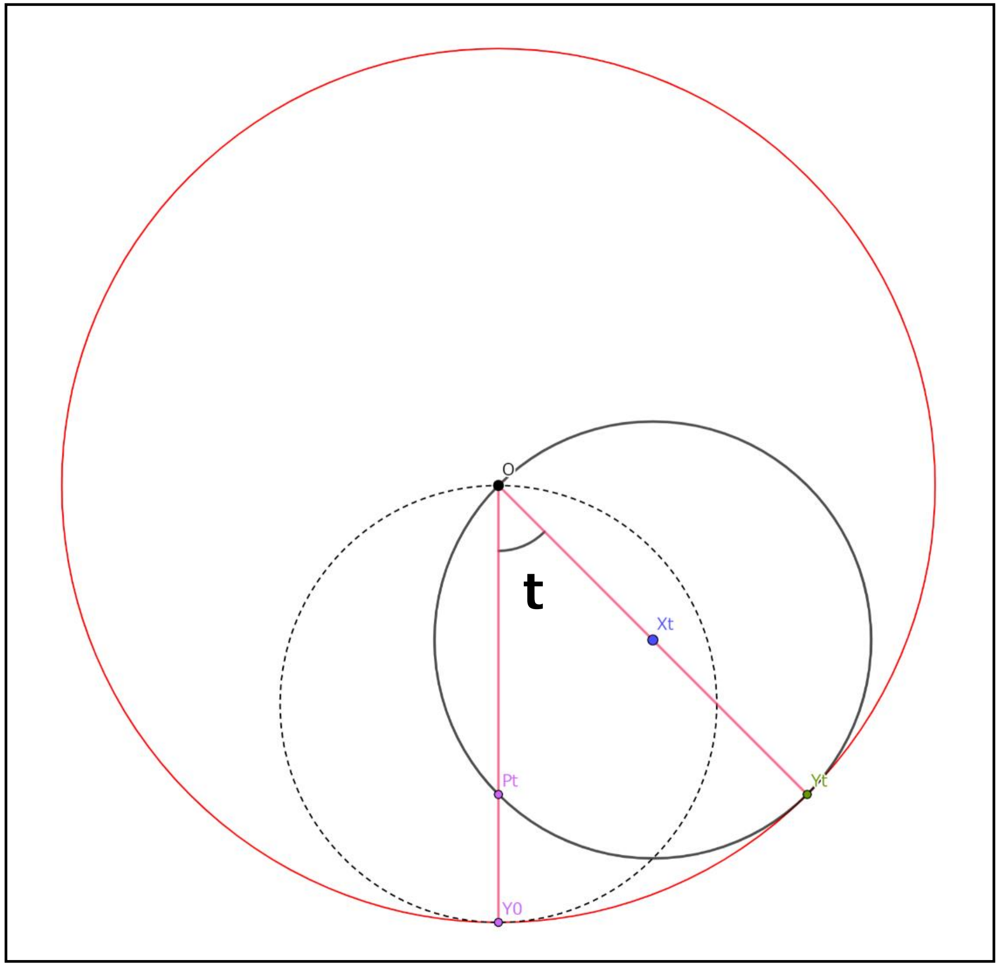


解答の準備！

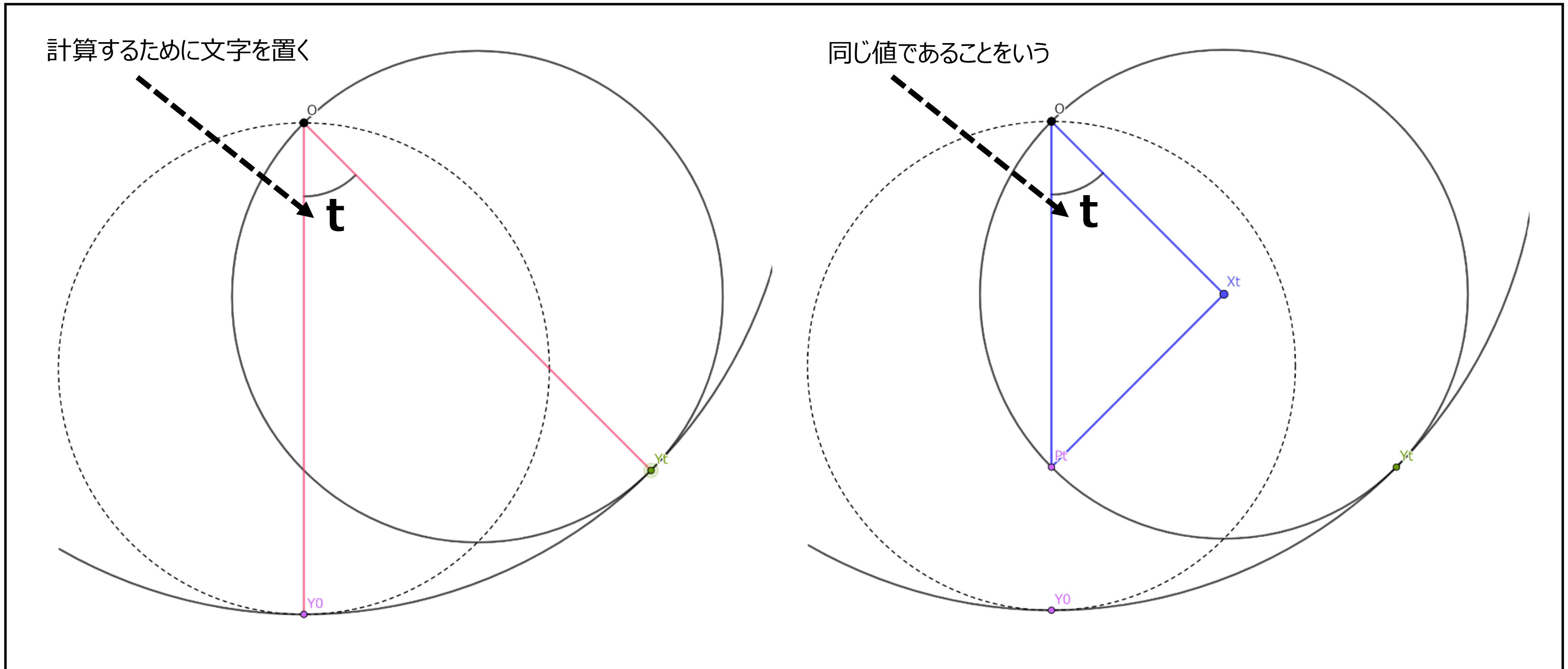
$$\begin{cases} \angle Y_2OY_0 = t^\circ \\ \text{点}O\text{：大円の中心} \\ \text{点}X_t\text{：動いた先の小円の中心} \\ \text{点}P_t\text{：点}P\text{の動く先} \\ \text{点}Y_t\text{：動いた先での接点} \end{cases}$$

点Pが一直線上を動く

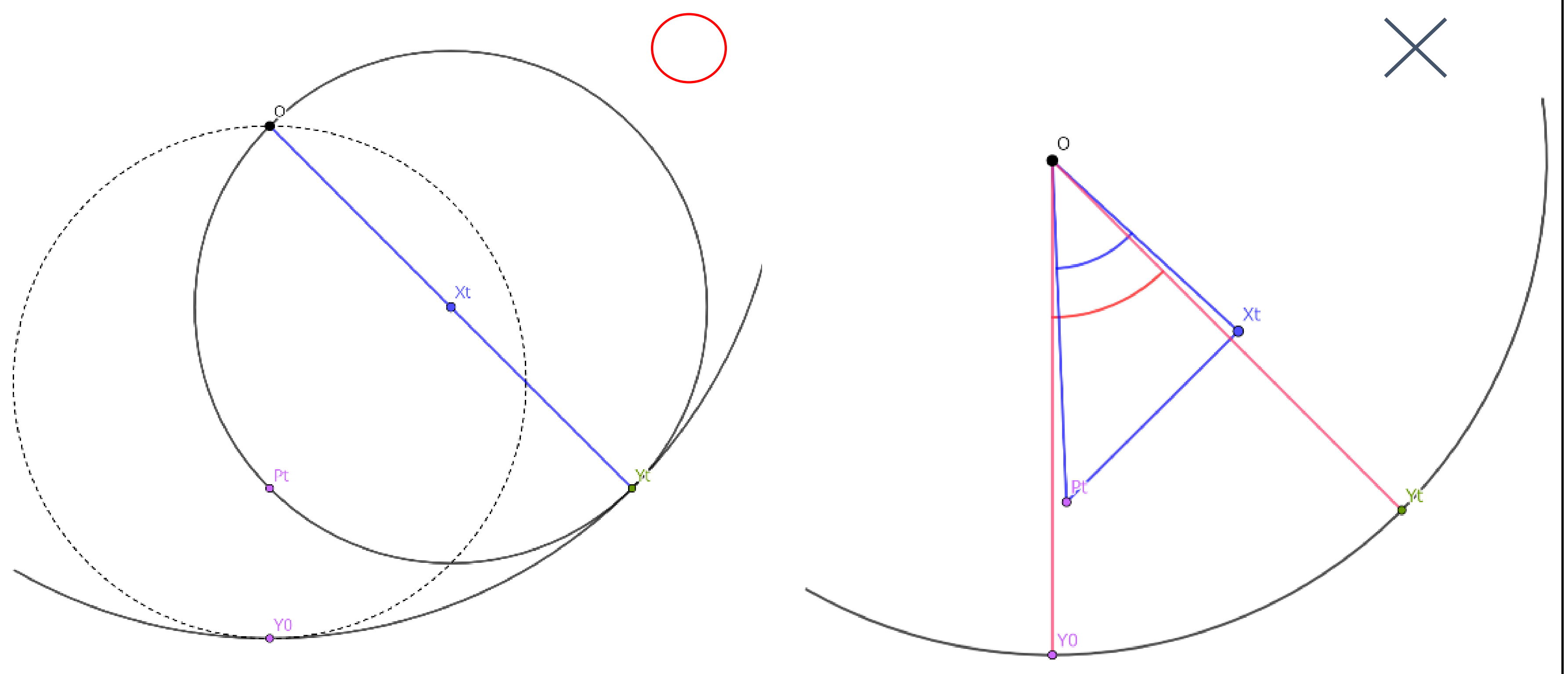
＝点O, P_t, Y_0が常に一直線上



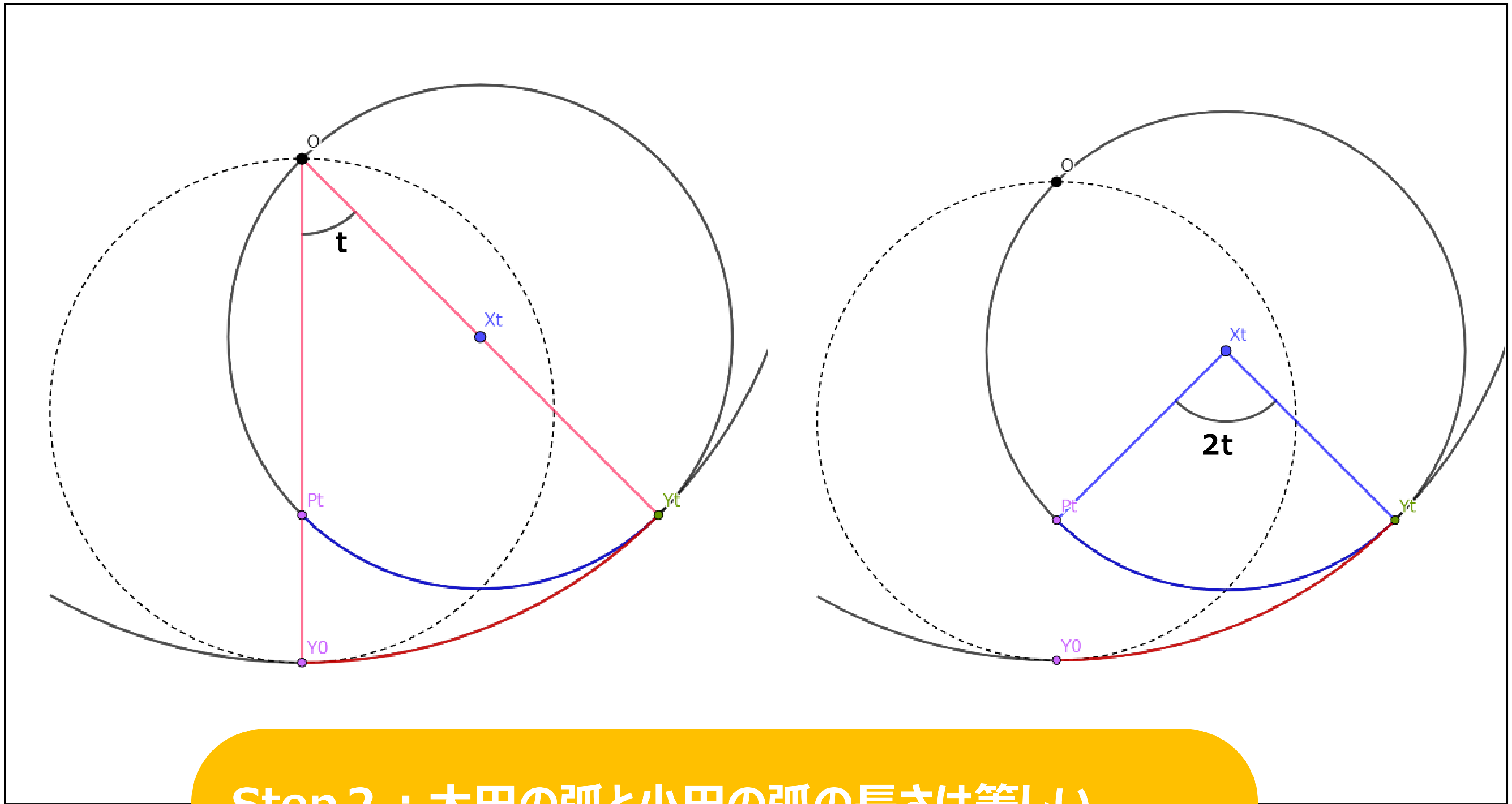
解答の流れ



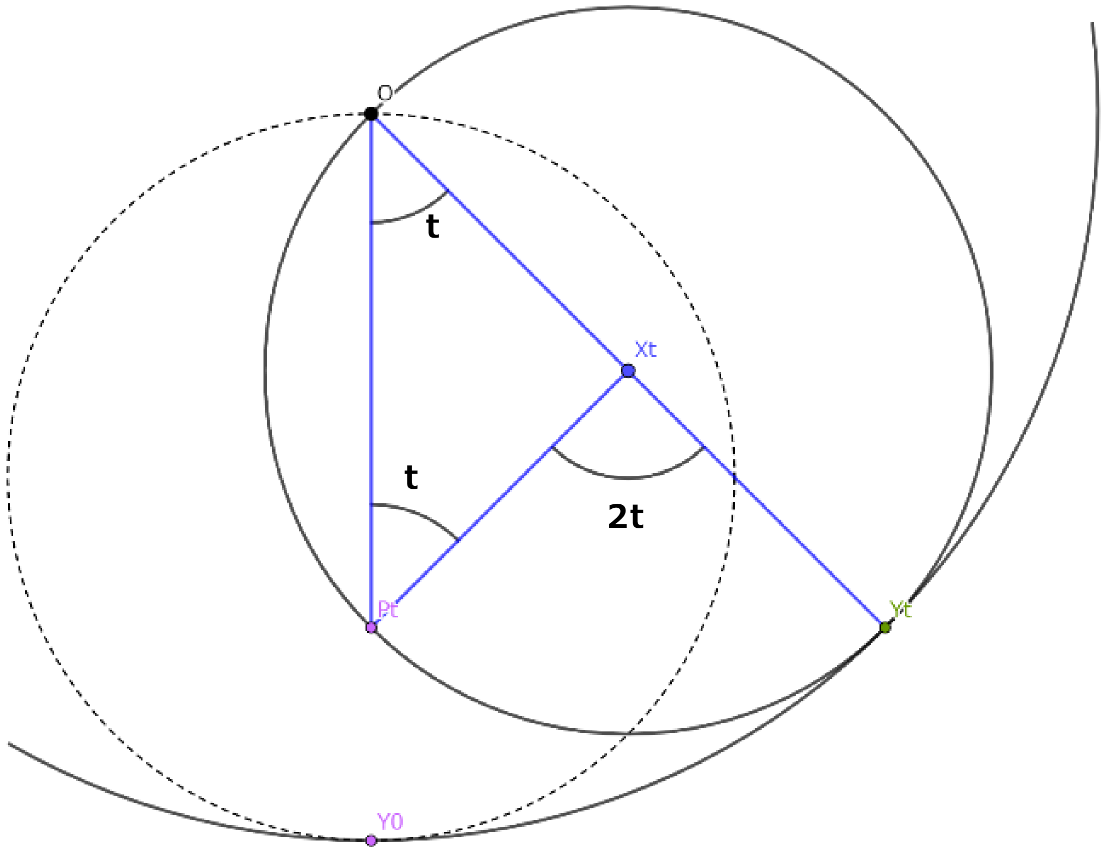
Point：上の２つの角度が等しいことを説明！



Step 1 ：大円の中心、小円の中心、接点は一直線上



Step 2 ：大円の弧と小円の弧の長さは等しい



Step３：外角＆二等辺の性質から∠XtOPtを求める

（証明）

動いている小円の**<u>あるとき</u>**の中心を X_t 、そのときの小円が大円に接している点を Y_t とする。

このとき、小円は大円に Y_t で内接しており、点 O, X_t, Y_t は一直線上(★)で $\boldsymbol{\angle X_t O P_t = \angle Y_t O P_t}$ 。

さて、 $\angle Y_t O Y_o = t°(< 90°)$ とすると、弧$Y_t Y_0$と弧$Y_t P_t$はどちらも小円が動いた距離なので長さが等しいので、<u>大円の半径が小円の半径の２倍であることに注意すると、</u>

$$2 \times OX_t \times \frac{\angle Y_t X_t P_t}{360°} = 2 \times OY_o \times \frac{\angle Y_t O Y_0}{360°} = 2 \times (2 \times OX_t) \times \frac{\angle Y_t O Y_0}{360°}$$

が成立する。よって $\angle Y_t X_t P_t = 2\angle Y_t O Y_0 = 2t$ である。ここで $\triangle OX_t P_t$ は二等辺三角形で底角が等しく、外角$\angle P_t X_t Y_t$に注意し、$\boldsymbol{\angle X_t O P_t} = \angle X_t P_t O = \boldsymbol{(1/2)\angle P_t X_t Y_t} = (1/2)2t = t = \boldsymbol{\angle Y_t O Y_0}$が成立。

したがって、$\boldsymbol{\angle Y_t O Y_0} = \angle X_t O P_t = \boldsymbol{\angle Y_t O P_t}$ がいえて、点 Y_0, O, P_t は一直線上。

点 Y_0, O は $\boldsymbol{t}$ **に依らず常に同じ位置にあり、点** $\boldsymbol{P_t}$ **は直線$\boldsymbol{Y_0 O}$上にある。**

t に関して、他の角度のときも同様の図になるので同様に説明できる。//

ポイントまとめ

（１）点Ｐは**一直線上**を動いている！

→ 平面幾何の知識（**外角**の性質）で説明できた

（２）直線上に動く条件が**なんとなく**わかった。

→「<u>大円の半径が小円の半径の２倍であることに注意すると、</u>」

① そうでないと、証明内の傍線部直後の式が成立しない。

② 必ず小円が**大円の中心Oを通りながら**動いている（証明の(★)部分）

ご参考

（１） **外角の性質**はなぜ成り立つ？

- 直線角度、三角形の内角の和がそれぞれ 180°

（２） **ラジアン**使用民族は $\angle Y_t O Y_0 = t(\mathrm{rad})$ で。

- ラジアンの良さがわかるかも

（３） **$t°(<90°)$ 以外の場合**も図をかけば同様。

- $t° = 90°$→明らか（笑）です！
- $90° < t \leq 180°$→$0° < t < 90°$の小円を x 軸対称で移してもろて
- $180° < t < 360°$→$0° < t < 180°$の小円を y 軸対称で移してもろて

疑問②　なぜ振り子のような動き方？

三角関数、ベクトルの性質を用いて xy 平面上で軌跡を実際に求めてみよう！（※リンク先で色んな実験ができる）

参考資料：https://www.geogebra.org/m/wevkfgev

問題を次のように数学的な問題に言い換えてみよう。

問題２

大円の中心を O とする。

動き出す前の小円の中心を X_0 として、図のように点 P で大円に内接するとする。

小円が大円上を一回転動くときに、点 P が動く軌跡を求めよ。

ただし、大円の半径を 2R、は小円の半径を R とする。（R＞０）

解答の準備！

Goal

：点 P_t の座標を t で表現

Step1

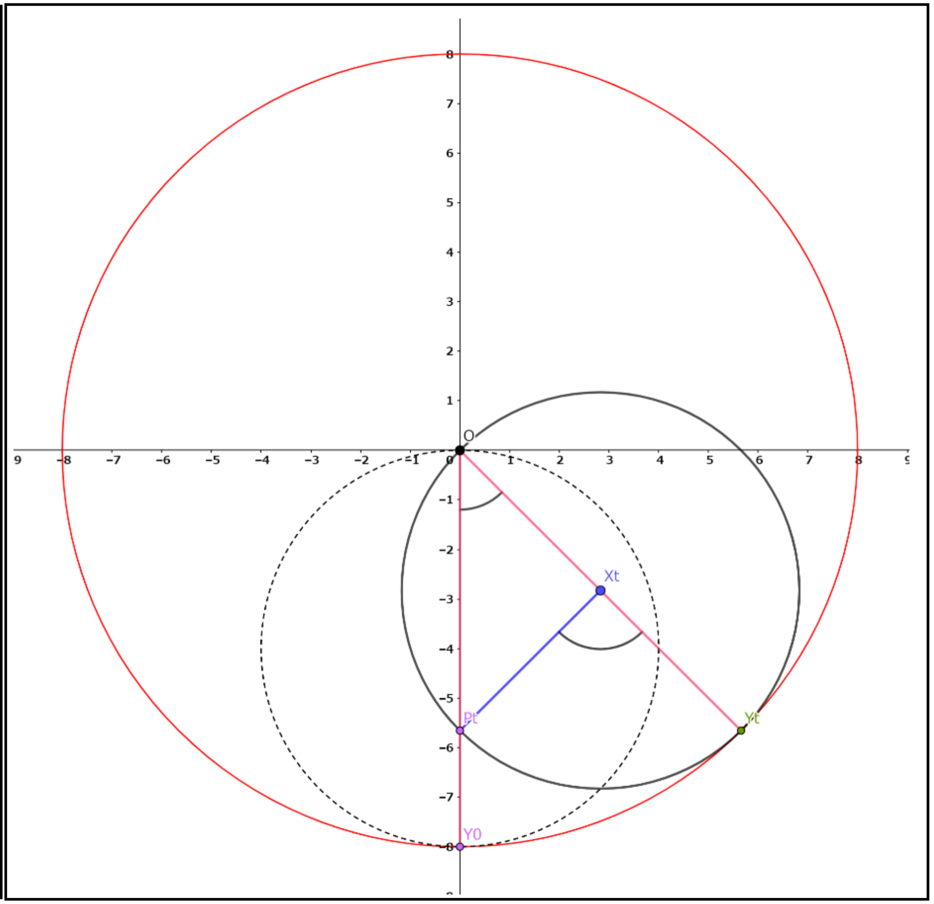
：いったん**小円の中心** X_t を経由！

→ $\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OX_t} + \overrightarrow{X_tP_t}$

Step2

：円の中心から円上の点へのベクトル

→ 三角関数で表現（三角関数の本質）



思い出そう！

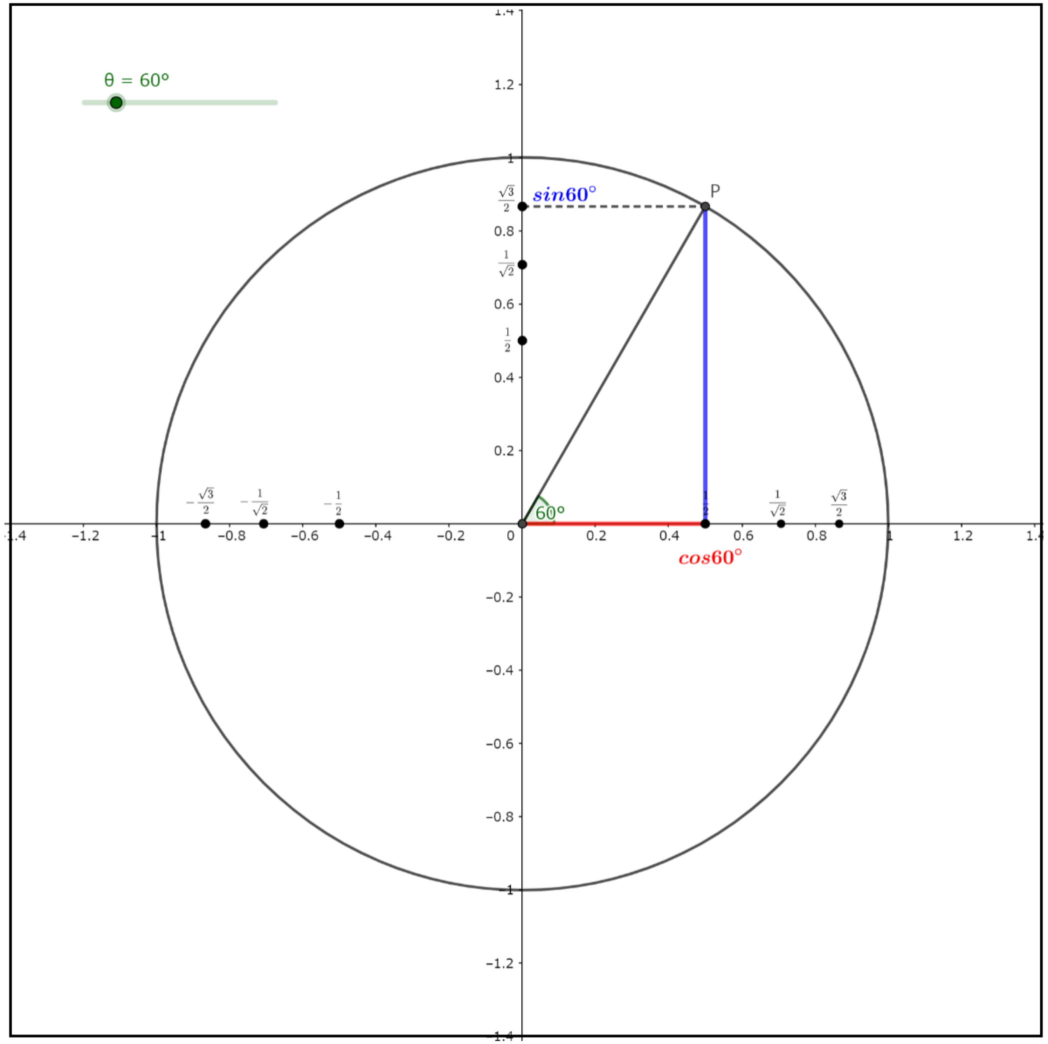
三角関数の定義

参考資料：三角関数（単位円による定義） - GeoGebra

定義：
単位円（半径が１）上の点の
x 座標：cosθ
y 座標：sinθ

↓ R 倍の拡大

すぐ分かる帰結：
円（半径がR）上の点の
x 座標：Rcosθ
y 座標：Rsinθ



（解答）

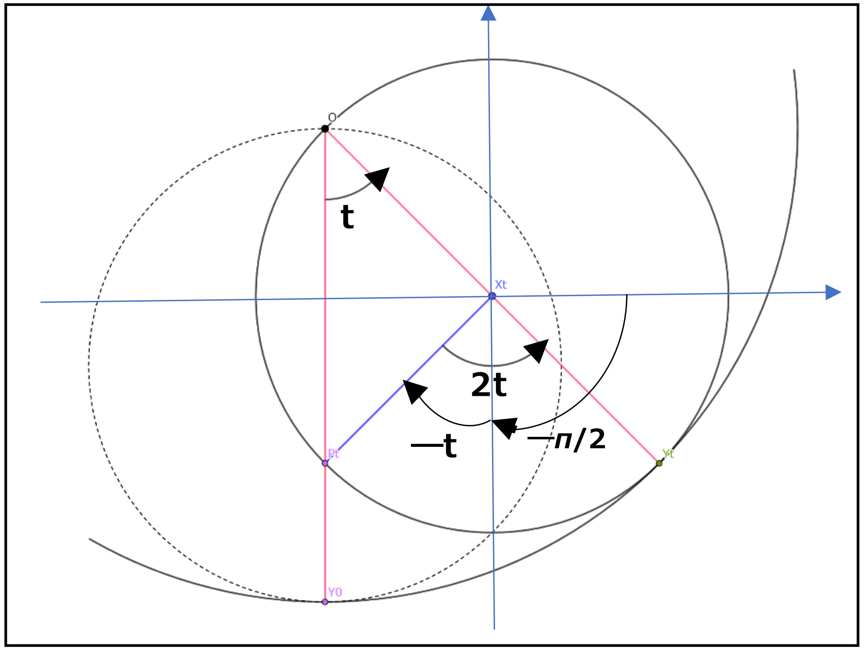
あるときの小円の中心を X_t とする。また、そのときの小円が大円に接している点を Y_t とする。

x 軸の正の向きを始線として、OY_0 から OY_t へ $t\ (\mathrm{rad})$ 動いているとすると $\angle Y_0OY_t = t\ (\mathrm{rad})$ である。

さて、弧Y_0Y_tと弧P_tY_tは長さが等しく、大円の半径が小円の半径の２倍であることに注意すると、

$$2\cdot OX_t\cdot\angle P_tX_tY_t = 2\cdot OY_o\cdot\angle Y_0OY_t = 2\cdot(2\cdot OX_t)\cdot\angle Y_0OY_t$$

が成立する。よって $\angle P_tX_tY_t = 2\angle Y_0OY_t = 2t$ である。ここで X_tP_t から X_tY_t へ $2t\ (\mathrm{rad})$ であることに注意する。すると X_tP_t は x 軸の正の向きから $-(\pi/2)-t\ (\mathrm{rad})$ 動いていることがわかるので、



$$\overrightarrow{X_tP_t} = (R\cos(-(\pi/2)-t\ ), R\sin(-(\pi/2)-t\ ))$$
$$= (-R\sin t\,, -R\cos t)$$

OX_t は x 軸の正の向きから $-(\pi/2)+t$ (rad) 動いていることに注意すれば

$$\overrightarrow{OX_t} = (R\cos(-(\pi/2)+t\,), R\sin(-(\pi/2)+t\,)) = (R\sin t\,, -R\cos t)$$

であるから、結局、

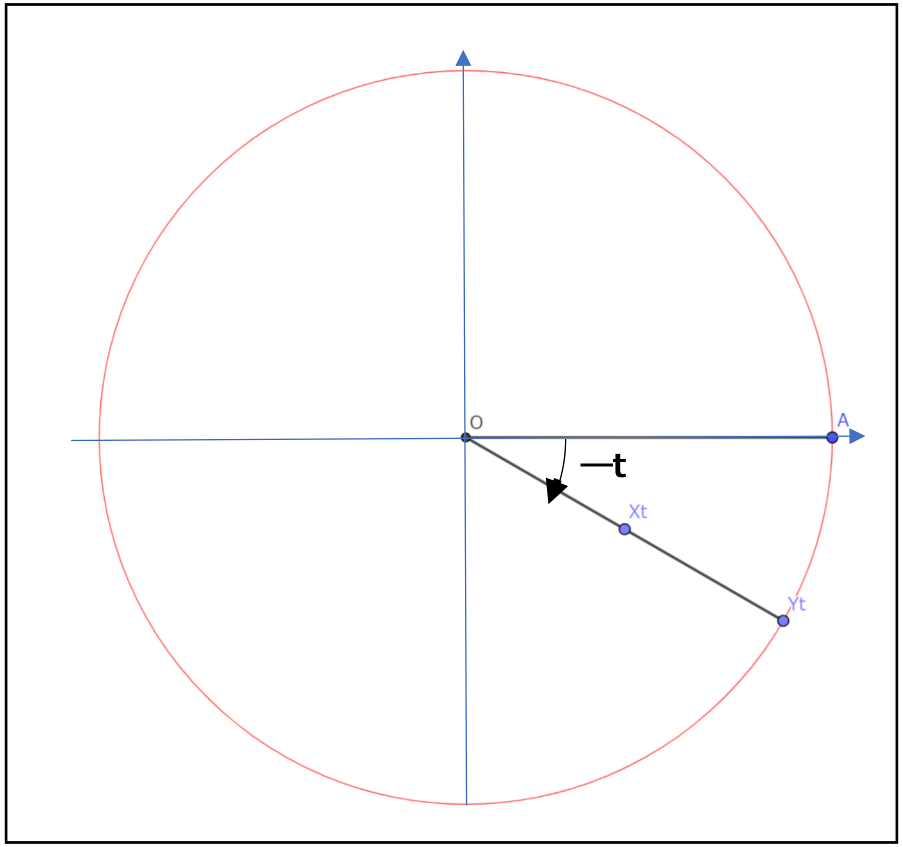
$$\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OX_t} + \overrightarrow{X_tP_t}$$
$$= (R\sin t\,, -R\cos t)$$
$$+ (-R\sin t\,, -R\cos t) = (0, -2R\cos t)$$

となる。したがって、点 P_t の座標は $P_t(0, -2R\cos t)$ と

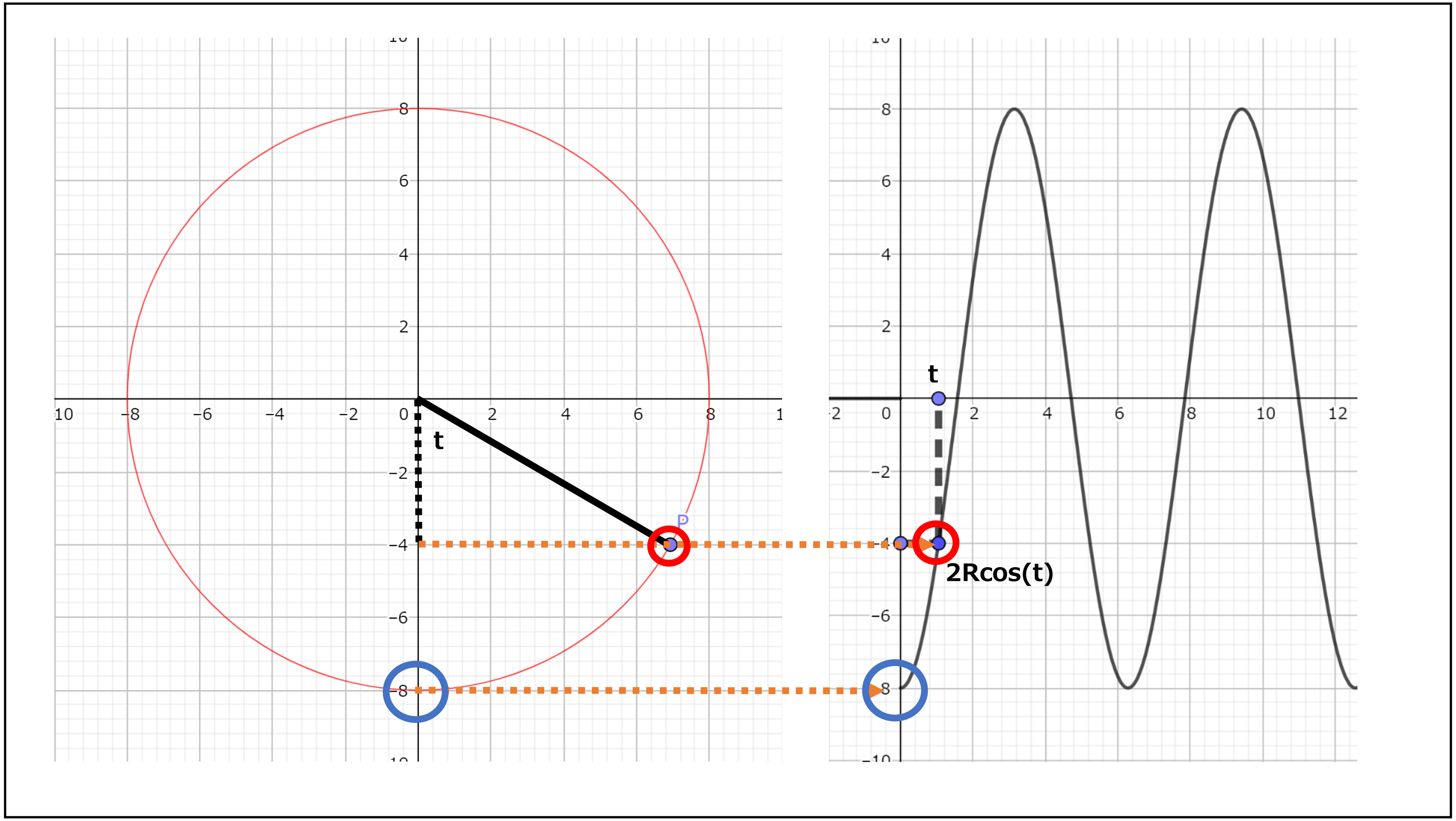
求まる。

以上より、点 P_t の軌跡が大円の点 O と Y_0 を通る直

径の線分上。//



参考資料：https://www.geogebra.org/m/n5mgzrba



まとめ

（１）　**振り子**のような動き方は**三角関数**が関係

▶振り子の運動の仕方と三角関数の関連性

（２）　小円の最初の位置を工夫できる

▶例）小円の直径が x 軸の正の部分と重なるようにする

▶上の例では、軌跡を媒介変数表示で $P_t(2R\cos t\,,0)$ と求まる

（３）　大円の半径と小円の半径の比率を変えると？

▶一般に**アステロイド**というもの