【平面幾何での証明】

問題１

大円の中心を O とする。

小円の中心を X_0 として、点 P で大円に内接している。

点 P が元の位置に戻るまで小円が大円上を動くとき、点 P が動く軌跡は直線であることを説明せよ。

ただし、大円の半径は小円の半径の２倍であるとする。

（証明）

動いている小円の**あるとき**の中心を X_t 、そのときの小円が大円に接している点を Y_t とする。

このとき、小円は大円に Y_t で内接しており、点 O, X_t, Y_t は一直線上(★)で $\boldsymbol{\angle X_tOP_t = \angle Y_tOP_t}$ 。

さて、 $\angle Y_tOY_o = t°(< 90°)$ とすると、弧Y_tY_0と弧Y_tP_tはどちらも小円が動いた距離なので長さが等しいので、大円の半径が小円の半径の２倍であることに注意すると、

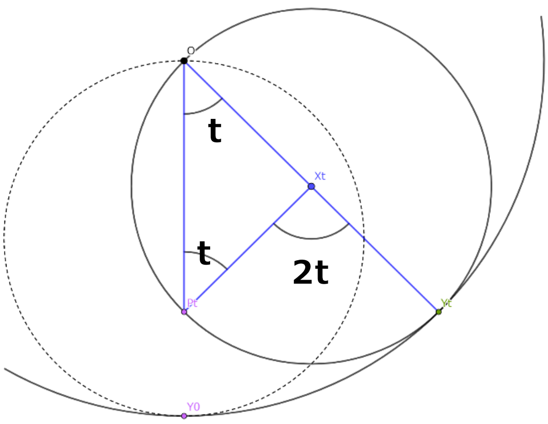
$$2 \times OX_t \times \frac{\angle Y_tX_tP_t}{360°} = 2 \times OY_o \times \frac{\angle Y_tOY_0}{360°} = 2 \times (2 \times OX_t) \times \frac{\angle Y_tOY_0}{360°}$$

が成立する。よって $\angle Y_tX_tP_t = 2\angle Y_tOY_0 = 2t$ である。ここで $\triangle OX_tP_t$ は二等辺三角形で底角が等しく、外角$\angle P_tX_tY_t$に注意し、$\boldsymbol{\angle X_tOP_t} = \angle X_tP_tO = \boldsymbol{(1/2)\angle P_tX_tY_t} = (1/2)2t = t = \boldsymbol{\angle Y_tOY_0}$が成立。

したがって、$\boldsymbol{\angle Y_tOY_0} = \angle X_tOP_t = \boldsymbol{\angle Y_tOP_t}$ がいえて、点 Y_0, O, P_t は一直線上。

点 Y_0, O は $\boldsymbol{t}$ **に依らず常に同じ位置にあり、点** $\boldsymbol{P_t}$ **は直線**$\boldsymbol{Y_0O}$**上にある。**

t に関して、他の角度のときも同様の図になるので同様に説明できる。//



【ベクトル・三角関数で軌跡を求める】

問題２
大円の中心を O とする。
小円の中心を X_0 として、点 P で大円に内接している。
点 P が元の位置に戻るまで小円が大円上を動くとき、点 P が動く軌跡を求めよ。
ただし、大円の半径を 2R、は小円の半径を R とする。（R＞０）

（解答）
あるときの小円の中心を X_t とする。また、そのときの小円が大円に接している点を Y_t とする。
x 軸の正の向きを始線として、OY_0 から OY_t へ $t\,(\mathrm{rad})$ 動いているとすると $\angle Y_0OY_t = t\,(\mathrm{rad})$ である。

さて、弧Y_0Y_tと弧P_tY_tは長さが等しく、大円の半径が小円の半径の２倍であることに注意すると、

$$2\cdot OX_t\cdot\angle P_tX_tY_t = 2\cdot OY_o\cdot\angle Y_0OY_t = 2\cdot(2\cdot OX_t)\cdot\angle Y_0OY_t$$

が成立する。よって $\angle P_tX_tY_t = 2\angle Y_0OY_t = 2t$ である。ここで X_tP_t から X_tY_t へ $2t\,(\mathrm{rad})$ であることに注意する。すると X_tP_t は x 軸の正の向きから $-(\pi/2)-t\,(\mathrm{rad})$ 動いていることがわかるので、

$$\overrightarrow{X_tP_t} = (R\cos(-(\pi/2)-t\,),R\sin(-(\pi/2)-t\,)) = (-R\sin t\,,-R\cos t)$$

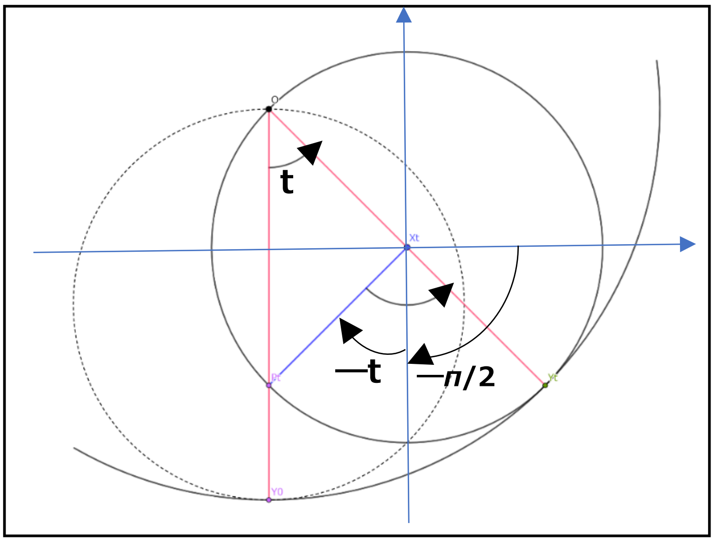
OX_t は x 軸の正の向きから $-(\pi/2)+t\,(\mathrm{rad})$ 動いていることに注意すれば

$$\overrightarrow{OX_t} = (R\cos(-(\pi/2)+t\,),R\sin(-(\pi/2)+t\,)) = (R\sin t\,,-R\cos t)$$

であるから、結局、

$$\overrightarrow{OP_t} = \overrightarrow{OX_t}+\overrightarrow{X_tP_t} = (R\sin t\,,-R\cos t)+(-R\sin t\,,-R\cos t) = (0,-2R\cos t)$$

となる。したがって、点 P_t の座標は $P_t(0,-2R\cos t)$ と求まる。
以上より、点 P_t の軌跡が大円の点 O と Y_0 を通る直径の線分上。//



【小円の半径の和が大円の半径になる組み合わせ★】

問題３
大円の中心を O、半径を１とする。
小円の中心を X_0、半径を r （ r は有理数）として、点 P で大円に内接している。
点 P が元の位置に戻るまで小円が大円上を動くときに、点 P が動く軌跡を W_r とする。
このとき W_r と W_{1-r} が一致することを証明せよ。

※「r は有理数」は「点 P が元の位置に戻るまで」の条件を実現するためのもの。
※「点 P が元の位置に戻るまで」の条件がないと永遠に軌跡が描き続けられるので、この条件を加えた。
永遠を極限などで表現すれば下記証明を当該条件がない場合に拡張できるのだろうか…？
（解答）
まず、任意に有理数 $l>0$ をとり W_l を求める。
あるときの小円の中心を X_t とする。また、そのときの小円が大円に接している点を Y_t とする。
x 軸の正の向きを始線として、OY_0 から OY_t へ $t\,(\mathrm{rad})$ 動いているとすると $\angle Y_0OY_t=t\,(\mathrm{rad})$ である。

さて、弧Y_0Y_tと弧P_tY_tは長さが等しく、大円の半径が１かつ小円の半径が l であることに注意すると、

$$\angle P_tX_tY_t=2OX_t\cdot\angle P_tX_tY_t/2OX_t=2OY_o\cdot\angle Y_0OY_t/2OX_t=l\cdot\angle Y_0OY_t=(1/l)t$$

が成立する。ここで X_tP_t から X_tY_t へ $lt\,(\mathrm{rad})$ であることに注意する。すると X_tP_t は x 軸の正の向きから $-(\pi/2)-((1/l)-1)t\,(\mathrm{rad})$ 動いていることがわかるので、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{X_tP_t}&=(l\cos(-(\pi/2)-((1/l)-1)t\,),l\sin(-(\pi/2)-((1/l)-1)t))\\&=(-l\sin(((1/l)-1)t),-l\cos(((1/l)-1)t))\end{aligned}$$

OX_t は x 軸の正の向きから $-(\pi/2)+t\,(\mathrm{rad})$ 動いていることに注意すれば

$$\overrightarrow{OX_t}=\big((1-l)\cos(-(\pi/2)+t\,),(1-l)\sin(-(\pi/2)+t\,)\big)=((1-l)\sin t,-(1-l)\cos t)$$

であるから、結局、

$$\overrightarrow{OP_t}=\overrightarrow{OX_t}+\overrightarrow{X_tP_t}=(-l\sin(((1/l)-1)t)+(1-l)\sin t,-l\cos(((1/l)-1)t)-(1-l)\cos t)$$

となり $P_t(-l\sin(((1/l)-1)t)+(1-l)\sin t,-l\cos(((1/l)-1)t)-(1-l)\cos t)$ と求まる。

ここで、改めて t の動く範囲を考える。
l は有理数なので $l=m/n$ なる１以上の自然数 n とそれと互いに素な整数 m がとれる。
小円の半径が l で円周は $2l\pi=2m\pi/n$ 、大円の半径が１で円周は 2π である。
点 P が元の位置に戻ったときの t_0 は $t_0=2a\pi$（ a は１以上の整数）とかける。
さらに、次の位置で点 P で内接するまで小円は大円の円周上を $2l\pi=2m\pi/n$ 動くので $t_0=b2l\pi=2bm\pi/n$（ b は１以上の整数）とかける。
m,n が互いに素であるので bm/n が整数になるのは $b=n$ が初めて。これにより $t_0=2m\pi$ と求まり t は０から動くので t の動く範囲は $0\le t\le t_0=2m\pi$ とわかる。

以上により、半径が $r, 1-r$ のとき点 P が元の位置に戻るときの t を求める。

r は有理数なので $r = p/q$ なる１以上の自然数 q とそれと互いに素な整数 p がとれる。

さらに $1 - r = (q-p) / q$ とかけて、明らかに $q-p$ と q は互いに素である。

それぞれ $t = 2p\pi, 2(q-p)\pi$ で点 P が元の位置に戻るので

$$W_r = \{(-r\sin(((1/r)-1)t) + (1-r)\sin t, -r\cos(((1/r)-1)t) - (1-r)\cos t) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq t \leq 2p\pi\}$$

$$W_{1-r} = \{(-(1-r)\sin(((1/(1-r))-1)t) + r\sin t, -(1-r)\cos(((1/(1-r))-1)t) - r\cos t) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq t \leq 2(q-p)\pi\}$$

とかくことができる。

以上から結局 $W_r = W_{1-r}$ を示せばよい。

（i） $W_r \ni \forall P$ をとる。

このとき、$P = (-r\sin(((1/r)-1)t) + (1-r)\sin t, -r\cos(((1/r)-1)t) - (1-r)\cos t)$ となる t が $0 \leq t \leq 2p\pi$ で存在する。

さて、 $u = 2q((1-r))\pi - t((1-r) / r)$ とすれば $0 \leq u \leq 2q((1-r))\pi = 2(q-p)\pi$ であり

$$t = 2qr\pi - u(r / (1-r))$$

$$\big((1/r)-1\big)t = \big((1/r)-1\big)(2qr\pi - u(r / (1-r))) = 2q(1-r)\pi - u = 2(q-p)\pi - u$$

がそれぞれ成立して $q-p$ が整数であることに注意すると

$$\sin(((1/r)-1)t) = \sin(2(q-p)\pi - u) = -\sin u$$

$$\sin t = \sin(2qr\pi - u(r / (1-r))) = -\sin\big(u(r/1-r)\big) = -\sin(((1/(1-r))-1)u)$$

$$\cos(((1/r)-1)t) = \cos(2(q-p)\pi - u) = \cos u$$

$$\cos t = \cos(2qr\pi - u(r / (1-r))) = \cos\big(u(r/1-r)\big) = \cos(((1/(1-r))-1)u)$$

となる。これにより $0 \leq u \leq 2(q-p)\pi$ であり

$$\begin{aligned} P &= (-r\sin(((1/r)-1)t) + (1-r)\sin t, -r\cos(((1/r)-1)t) - (1-r)\cos t) \\ &= (-(1-r)\sin(((1/(1-r))-1)u) \\ &\quad + r\sin u, -(1-r)\cos(((1/(1-r))-1)u) - r\cos u) \in W_{1-r} \end{aligned}$$

となるので $W_r \subset W_{1-r}$ が成立。

（ii） $W_{1-r} \ni \forall P$ をとる。

このとき、$P = (-r\sin(((1/r)-1)t) + (1-r)\sin t, -r\cos(((1/r)-1)t) - (1-r)\cos t)$ となる t が $0 \leq t \leq 2(q-p)\pi$ で存在する。

さて、 $u = 2qr\pi - t(r / (1-r))$ とすれば $0 \leq u \leq 2qr\pi = 2p\pi$ であり、(i)と同様に計算して

$$P = (-r\sin(((1/r)-1)t) + (1-r)\sin t, -r\cos(((1/r)-1)t) - (1-r)\cos t) \in W_r$$

となるので $W_{1-r} \subset W_r$ が成立。

(i)と(ii)を合わせて $W_r = W_{1-r}$ が成立。//

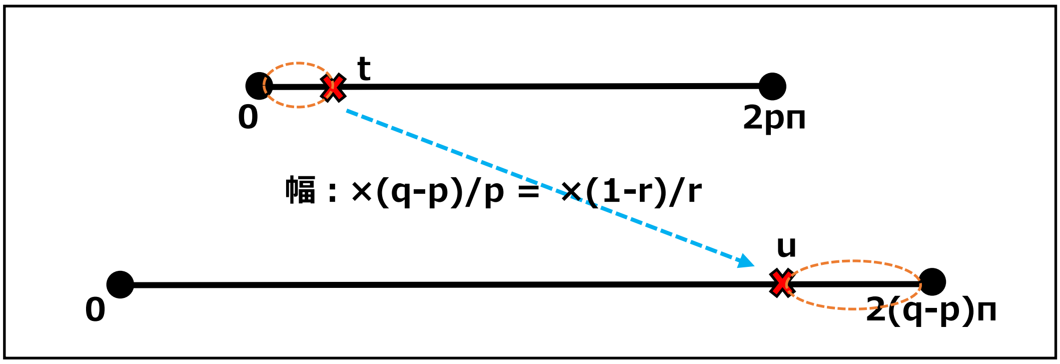
（補足）

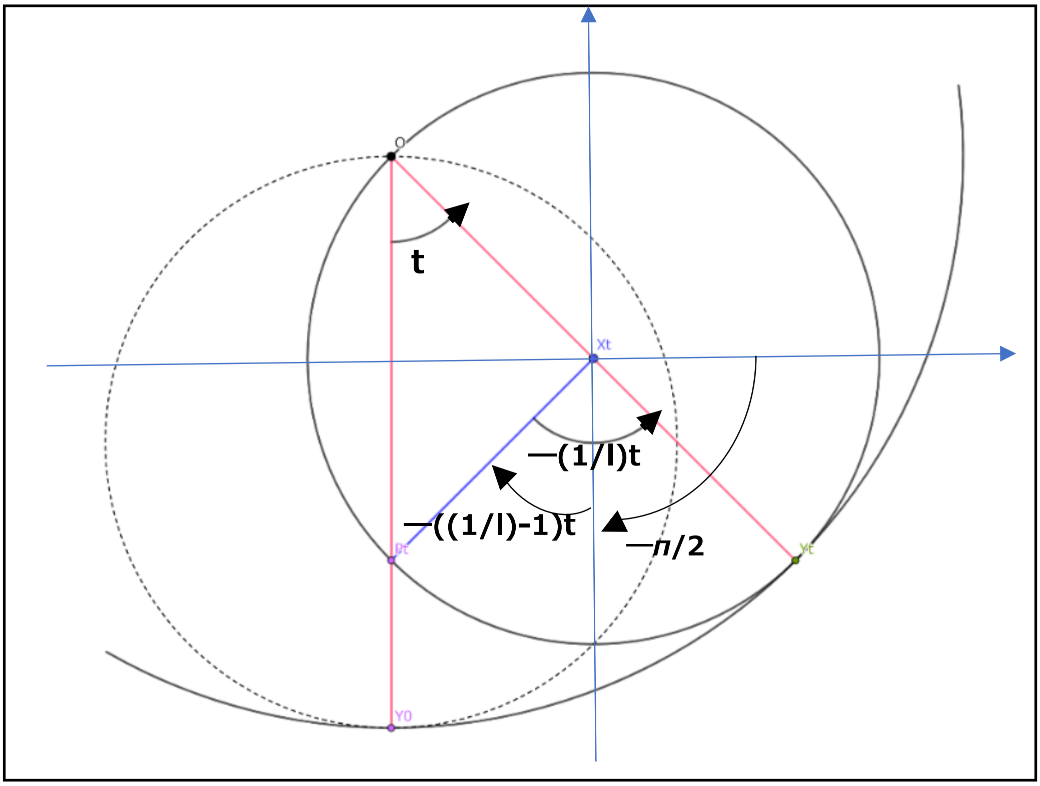
最後の段落で $W_r = W_{1-r}$ を示している。

ここで単に集合として一致しているだけではなく、t を u に変換するような $[0\ 2p\pi]$ から $[0\ 2(q-p)\pi]$ への写像が全単射であることに注意したい。

しかも、この写像の作り方から始点と終点が逆になっているような対応のさせ方であることもわかる。

（この写像はぐるぐる定規で実験してみれば、容易に思いつけるだろう。）





【xy 平面の式でかける特別なアステロイド】

問題４
大円の中心を原点 O、半径を１とする。
小円の中心を X_0、半径を r （ r は有理数）として、点 P で大円に内接している。
点 P が元の位置に戻るまで小円が大円上を動くときに、点 P が動く軌跡を W_r とする。
このとき $W_{1/4}$ の軌跡の式を x, y の式で表せ。

（解答）
問題３から小円半径が l のときの $P_t(-l\sin(((1/l)-1)t)+(1-l)\sin t, -l\cos(((1/l)-1)t)-(1-l)\cos t)$ と求まっている。（ただし $0 \le t \le t_0 = 2m\pi$ で m は l の分母）
ここで $l = 1/4$ とすれば

$$P_t(-(1/4)\sin 3t + (3/4)\sin t, -(1/4)\cos 3t - (3/4)\cos t)$$
$$= (-(1/4)(3\sin t - 4\sin^3 t) + (3/4)\sin t, -(1/4)(-3\cos t - 4\cos^3 t)$$
$$-(3/4)\cos t) = (\sin^3 t, \cos^3 t)$$

また t の範囲は $0 \le t \le 2\pi$ である。
以上から

$$W_{1/4} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x = \sin^3 t, y = \cos^3 t \text{ なる } t \text{ が } 0 \le t \le 2\pi \text{ で存在}\right\}$$

$x = \sin^3 t, y = \cos^3 t$ なる t が $0 \le t \le 2\pi$ で存在
$\Leftrightarrow$ $\cos t = \sqrt[3]{y}, \sin t = \sqrt[3]{x}$ なる t が $0 \le t \le 2\pi$ で存在
$\Leftrightarrow$ $\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = 1$

以上により

$$W_{1/4} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = 1\right\}$$

求める式は $\left(\sqrt[3]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = 1$ である。//

※ $\sqrt[3]{(-1)} = -1$ に注意。同値条件の２つめは $0 \le t \le 2\pi$ で全て成立していることの検証要。
※ 同値条件の３つめは、三角関数の定義。このように解けるのは極めて稀。

$$W_{1/4} = W_{3/4} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = 1\right\}$$