

## 0章 実関数としての指数関数

指数関数は多くの科学現象に使用される最も基本的な関数である。微分しても元の関数に戻るといふ極めて特異な性質を持っているため頻繁に使用されている。しかし、高校数学では指数法則なるものが突然出てきて問題が解ければそれでよし、という何時ものお調子で数学的に興味深い指数の構成などは腫物に触るが如く言及を避けている。**タピオカ（夢粒）**を飲んでIQを爆上げしている現代の高校生には非常に興味がある話題と思われるのに…！

筆者は指数関数が数学的にはどのような構造を持った関数なのかを明らかにするために頭をこねくり回した。たかが高校数学の理論で収まる問題であると思いきや**そうは問屋が卸さなかった**。一方で証明の発想に大学の数学科で学ぶような基本的な**数列の収束の概念**（実数とはそもそものような空間であるか）であったり、ルベーグ積分構成に必要な**拡張の概念**（階段関数の集合を**完備化**して関数空間をつくる）の考え方であったりを見出し、ある種の興奮を持って取り組むことができた。

ところで本章の隠れたテーマは数学の醍醐味である「**意味の拡張**」である。日常生活でもよく行われる「意味の拡張」は数学でも随所に表れる。抽象化という作業そのものが「意味の拡張」なのであるからそれは当然であるのかもしれない。例えば、三角関数は最初三角比と呼ばれる、0度以上90度未満のみ考えられるものである。それが単位円上に存在する点の座標として定義し直すことで、全ての実数に対し定義できる三角関数に発展する。さらには級数と言う形で定義し直すことで、複素数に対しても三角関数が定義できるようになる。これこそが「意味の拡張」である。

「意味の拡張」は日常生活においても有用である。それは「意味の拡張」が異なる事物を結びつける抽象化だからである。異なる事物の似ている性質を取り出し検証し本質について考察する。その過程でこれまで気づけなかった、または重視していなかったものを再発見することができる。すると、課題の解決策がひとりでに降ってくるのだ。学問や言葉は過去の経験を抽象化したものであるが、それらによって異なる事物を同様に扱うことができ、私たちは生活を豊かにする画期的な方法を生み出せているのではなかろうか。

では数学において、「意味の拡張」で最も注意せねばならないこととは何か。これも日常生活に照らせば至極当然であるが、「**大きく意味を逸脱しないこと**」である。また、拡張で大事なのは拡張が有用であることだ。有用でない拡張化をして馬鹿を見るのは多くが理論家である。何でも抽象化したがる理論家は実践家に後れをとることがしばしばある。筆者だって陰では「あいつは口だけ」と言われているに違いない。

最後にどのような本であっても各節で挫折したときに先の節に進んで戻ってくると突然解決するという**摩訶不思議な現象**が発生し得ることをささやかなるアドバイスとして送る。