0 − 1 指数の拡張

本節では数学における「意味の拡張」を指数の拡張を例にとり、体感してもらう。とはいうものの本論の面白い部分は定義 9 からであって、そこから読み始めて適宜戻ることも有用な読み方と言えよう。ただ、順番には意味があって、基本は前に定義されたものや前に証明されたもののみを使って各定理・各補題は証明されている。勿論、例外も存在するが、それに関しては注を付した。

本節では以下の点に注意して読まれるとよいだろう。
・「意味の拡張」を行うには、拡張前の事実（定理の成立）が拡張後にも成立するよう定義する
・定義拡張後は拡張前に成立していた事実が同様に成立することを証明し定義の妥当性を確認する
・上記証明には拡張前に成立していた事実を使うと解決することが多い

また一方で数学的な観点としては以下の点について学習できる。
・指数法則と指数に関する大小関係及び、それらを用いて証明される指数関数の性質
・極限計算における εN論法、 $\varepsilon\delta$論法や三角不等式の使い方
・「唯一存在」について言及した定理の証明の仕方及び使い方
・数学的な言葉の使い方

以上に留意し、取り組んでほしい。

加算を数回繰り返せば乗法となる。では、同様に乗法を数回繰り返したときの結果をどのように表せばよいのか。その答えが指数である。指数に関する議論の始まりがここにある。「数回」とあるように指数が 1 以上の自然数である指数に関してはそれがどのような値になるか自然に共通理解としてある。それが次の定義 1 である。

定義 1 （基本的な指数の定義）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ とする。
（つまり、a は正の実数かつ n は 0 より大きい自然数とするということ）
このとき、

$$a^n = aaa \ldots\ldots a$$

と定める。このとき、a^n に対し a を底、n を指数という。

※上記の定義は実数の乗法が可換であることを前提にしている。もし、可換でなければ n 回かけ合わせた結果が異なる可能性がある。実数の乗法が可換であることは本題から外れるため言及しないが念のため。

以下の定理２は定義１から明らかに成立する。この事実は指数を拡張した以後も確認することにする。この事実の成立を確認することで、意味を拡張した際の定義の仕方が有用なものであって出鱈目なものでないとするのである。

定理２（指数法則の成立）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $m, n \geq 1$ とする。
このとき、以下の２式が成立。
（１） $a^{m+n} = a^m a^n$
（２） $a^{mn} = (a^m)^n$
この２式を指数法則という。

※以後、この指数法則が指数を整数、有理数、実数と拡張したときも成立することを確かめる。
（証明）
（１） $a^m a^n = (aa \dots a)(aa \dots a) = aa \dots a$ で、最右辺は a を $m + n$ 個かけ合わせたもの。
（２） $(a^m)^n = (a^m)(a^m) \dots (a^m) = aa \dots a$ で、最右辺は a を mn 個かけ合わせたもの。

□

定理３や定理４は指数で表された値の大小関係に関する主張である。既に読者が指数関数のグラフをご存じの場合、それらを意識しながら眺めると良いだろう。

定理３（指数に対する大小関係）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $m, n \geq 1$ とする。
このとき、各場合について以下が成立。
（１） $a^n > 0$
（２） $a > 1,\ m < n \Rightarrow a^m < a^n$
（３） $0 < a < 1,\ m < n \Rightarrow a^m > a^n$

※以後、この大小関係が指数を整数、有理数、実数と拡張したときも成立することを確かめる。
※下記証明の $n - m$ は１以上の自然数であることに注意する。
（証明）
（１） $a \in \mathbb{R}+$より a を n 個かけ合わせたものも正。
（２） 定理２より $a^n - a^m = a^{n-m}a^m - a^m = a^m(a^{n-m} - 1)$ であるが
$$a > 1, k \geq 1 \Rightarrow a^k > 1$$
が直ちに成立するので OK。
（３） 定理２より $a^n - a^m = a^{n-m}a^m - a^m = a^m(a^{n-m} - 1)$ であるが
$$0 < a < 1, k \geq 1 \Rightarrow a^k < 1$$
が直ちに成立するので OK。

□

定理４（底に対する大小関係）
$a,b \in \mathbb{R}+$ かつ $n \geq 1$ とする。
このとき、以下が成立。

$$b > a \Rightarrow b^n > a^n$$

※以後、この指数法則が指数を整数、有理数、実数と拡張したときも成立することを確かめる。
（証明）
$b > a$ であれば $b^{n+1} = bb^n > ba^n > aa^n = a^{n+1}$ と帰納的に証明できる。

□

以上が、我々が直感的に知っている指数である。では指数を自然数から整数に拡張する。拡張する際は定理２が成立するように拡張することにしていたから、そのためには特に $m = 0$ の場合に

$$a^{m+n} = a^m a^n$$

が成立しなくてはいけないので、$a^m = 1$ と定義すれば良さそうである。全く同様に $m = -n$ の場合に

$$a^{m+n} = a^m a^n$$

が成立しなくてはいけないが左辺は先より 1 と定義するわけだから、 a^m は a^n の逆数として定義すれば良さそうである。さすれば、次のように定義するのが望ましいと直ちにわかるだろう。

定義５（指数の負の整数に関しての拡張）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $m \in \mathbb{Z}$ とする。
（つまり、m は整数とするということ）
このとき、

$$a^m = \begin{cases} a^m & (m > 0) \\ 1 & (m = 0) \\ a^{-m} & (m < 0) \end{cases}$$

と定める。ただし $0^0 = 1$ と定める。このとき a^m に対し a を底といい m を指数という。

※ $m > 0$ の場合は既に定義 1 により a^m にはある値が定まるし、また、$m < 0$ の場合には $-m > 0$ となるから、既に定義 1 により a^{-m} にはある値が定まる。従ってこの定義によって全ての整数 m に対し a^m が定まることが分かる。（逆に定まらないのであればそのような定義は拡張として欠陥がある。）

では、定義５で拡張した指数には妥当性があるのだろうか。（有用性のない無意味な定義になっていないだろうか。）それを確かめるには定理２で確かめた指数法則が定義５で定めた指数でも成立することを確かめればよい。それが次の定理６である。

定理６（指数を整数に拡張した際の指数法則の成立）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $m,n \in \mathbb{Z}$ とする。
このとき、以下の２式が成立。
（１） $a^{m+n} = a^m a^n$
（２） $a^{mn} = (a^m)^n$

（証明）

（１） 以下のそれぞれの場合で証明

(ｉ) $m = 0$ または $n = 0$

$m = 0$ のとき $a^m = 1$ となり $a^{m+n} = a^{0+n} = a^n = a^m a^n$ が成立。 $n = 0$ のときも同様に成立。

(ⅱ) $m > 0$ かつ $n > 0$

定理２（１）より成立。

(ⅲ) $m > 0$ かつ $n < 0$

定義５より $a^n = 1/(a^{-n})$ であり、定理２の成立と $-n \geq 1$ であることに注意すれば

$$a^m a^n = a^m(1/(a^{-n})) = \begin{cases} a^{m-(-n)} & (m > -n) \\ 1 & (m = -n) \\ 1/\left(a^{(-n)-m}\right) & (m < -n) \end{cases} = a^{m+n}$$

となるので OK。

(Ⅳ) $m < 0$ かつ $n > 0$

(ⅲ)と同様に成立。（証明内の m と n の役割を逆にすればよい。）

(Ⅴ) $m < 0$ かつ $n < 0$

定義５より $a^m = 1/(a^{-m}), a^n = 1/(a^{-n})$ であり、定理２の成立と $-m, -n, -(m+n) \geq 1$ であることに注意すれば

$$a^m a^n = (1/(a^{-m}))(1/(a^{-n})) = \left(1/\left(a^{(-m)+(-n)}\right)\right) = \left(1/\left(a^{-(m+n)}\right)\right) = a^{m+n}$$

となるので OK。

（２） 以下のそれぞれの場合で証明

(ｉ) $m = 0$ または $n = 0$

$m = 0$ のとき $a^m = 1$ となり $a^{mn} = a^0 = 1 = 1^n = (a^m)^n$ が成立。

$n = 0$ のとき $a^n = 1$ となり $a^{mn} = a^0 = 1 = (a^m)^0 = (a^m)^n$ が成立。

(ⅱ) $m > 0$ かつ $n > 0$

定理２（２）より成立。

(ⅲ) $m > 0$ かつ $n < 0$

定義５より $a^n = 1/(a^{-n})$ であり、定理２の成立と $-n, -mn \geq 1$ であることに注意すれば

$$a^{mn} = 1/(a^{-mn}) = 1/((a^m)^{-n}) = (a^m)^n$$

となって成立。最右辺の等号は定義５より成立。

(Ⅳ) $m < 0$ かつ $n > 0$
(ⅲ)と同様に成立。(証明内の m と n の役割を逆にすればよい。)

(Ⅴ) $m < 0$ かつ $n < 0$
定義５より $a^m = 1/(a^{-m}), a^n = 1/(a^{-n}) = (1/a)^{-n}$ であり、定理２の成立と $-m, -n, mn \geq 1$ であることに注意すれば

$$(a^m)^n = 1/((a^m)^{-n}) = 1/\left((a^m)(a^m)\ldots(a^m)\right) = (1/a^m)^{-n} = (a^{-m})^{-n} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}$$

となるので OK。

□

指数を整数に拡張した定義において、大小関係についても同様の事実が成立することを確認する。

定理７(指数を整数に拡張した際の指数に対する大小関係)
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $m, n \in \mathbb{Z}$ とする。
このとき、各場合について以下が成立。
(１) $a^m > 0$
(２) $a > 1,\ m < n \Rightarrow a^m < a^n$
(３) $0 < a < 1,\ m < n \Rightarrow a^m > a^n$

※(３)の場合は $a^m = (a^{-1})^{-m} = (1/a)^{-m}$ が定理６より成立し(２)に帰着。
(証明)
(１) $m > 0$ のときは定理３(１)より成立。$m = 0$ のときは $a^m = 1 > 0$。最後に $m < 0$ のときは $-m > 0$ であるから、再び定理３(１)より $a^m = 1/(a^{-m})$ となる。
(２) 定理６(１)より $a^n - a^m = a^{n-m}a^m - a^m = a^m(a^{n-m} - 1)$ であるが、先ほどの(１)より、$a^m > 0$ であるので $n - m > 0$ において $a^{n-m} > 1$ を示せばよいが、この不等式の成立は定理３(２)で確かめた。

□

定理８(指数を整数に拡張した際の底に対する大小関係)
$a, b \in \mathbb{R}+$ かつ $m \in \mathbb{Z}$ とする。
このとき、以下が成立。
(１) $m > 0, b > a \Rightarrow b^m > a^m$
(２) $m < 0,\ b > a > 1 \Rightarrow b^m < a^m$

※ $m = 0$ の場合は $b^m,\ a^m$ はともに１の値をとるので大小関係をつけるのは trivial な(自明な)例として記載していない。
(証明)
(１) $m > 0$ より、特に $m \geq 1$ であることに注意して、定理４(１)より成立。
(２) $-m > 0$ より、特に $-m \geq 1$ であることに注意して、定理４(１)より

$$b^m = 1/(b^{-m}) < 1/(a^{-m}) = a^m$$

□

指数を整数から有理数に拡張する時も定理６が成立するように拡張すればよい。そのためには例えば、

$$a^{(1/n)}$$

という値はどのような値であってしかるべきであろうか。定理６（２）の事実が成り立つには

$$\left(a^{(1/n)}\right)^n = a^{(1/n)n} = a$$

が成立していればよい。つまり n 乗して a となるような値を $a^{(1/n)}$ の値として定めればよい。それが定義９である。ところで、このような条件を満たす実数は本当に存在するのであろうか。もし、そのような値が存在していることがいえなければ、これから行う定義の拡張は机上の空論となる。それを解決するのが補題 10 である。この補題によって安心して定義９のように拡張することができる。補題 10 の証明では中間値の定理を用いる。中間値の定理は詳細に述べようとすれば位相や解析について深く理解する必要があり、本節では説明を行わないが「中間値の定理　図」などでググると途端に了解されるはずである。

定義９（指数の有理数に関しての拡張）

（１） $a \in \mathbb{R}+$ かつ $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ とする。

$$x^n = a$$

となる<u>正の実数が唯一存在する</u>が、この x を $\sqrt[n]{a}$ で表すことにする。

（２） $a \in \mathbb{R}+$ かつ $r \in \mathbb{Q}$ とする。

（つまり r は有理数とするということ）

$$r = \frac{m}{n}\quad(m\text{ は整数、}n\text{ は自然数})$$

<u>とできるが</u>、これを用いて

$$a^r = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

と定める。このとき a^r に対し a を底といい r を指数という。

※（１）の「<u>正の実数が唯一存在する</u>」の部分は証明しておく必要がある。（そうでないとこの定義が限定的なものになってしまったり、そもそも値を定めることができなかったりする可能性がある。）

※（１）の「<u>正の実数が唯一存在する</u>」の部分は $a \in \mathbb{R}+$ という条件で成立する。（実数 a が負の場合は成立しない。したがって、実数の指数関数は $a \in \mathbb{R}+$ でのみ考えることができる。）

※（２）の「とできるが」の部分について言及することもできるが、今回の本題から離れるので割愛する

※（２）の「とできるが」の部分について約分をしても a^r が同じ値になることは証明しておく必要がある。

補題 10（定義９を補償する際に必要な定理）

$a \in \mathbb{R}+$ かつ $n \geq 1$ とする。

$$x^n = a$$

となる<u>$x \in \mathbb{R}+$が唯一存在。</u>

※中間値の定理を用いて証明する。ここから a が負の場合は成立しないことも分かる。

（証明）
$a \in \mathbb{R}+$を任意にとる。 $n=1$ のとき $x=a$ のみが $x^n=a$ を満たすので $n \geq 2$ での成立を示す。
そこで $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x)=x^n-a$ と定める。このとき、$a \in \mathbb{R}+$であるから

$$f(0)=-a<0$$

この上で以下の２通りそれぞれを確かめる。

(ｉ) $a>1$ のとき
二項定理より $n \geq 2$ に注意すれば

$$f(a+1)=(a+1)^n-a=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k-a>na-a=a(n-1)\geq a>0$$

f は連続な関数でかつ $[0,a+1]$ は連結な集合であるから、中間値の定理より

$$\exists x \in (0,a+1), f(x)=0$$

また、f は定理８より狭義単調増加な関数であるからこのような x の存在は唯一。
（唯一でないとすると狭義単調増加であることに矛盾。）

(ⅱ) $a=1$ のとき
$x=1$ のみが $x^n=a$ を満たす。（「のみ」である部分は(ｉ)と同様に背理法によって示せる。）

(ⅲ) $0<a<1$ のとき

$$f(1)=1-a>0$$

より(ｉ)と同様の議論により $x^n=a$ となる x が唯一存在。

□

（★）定義９内の※「約分をしても同じ値になる」ことについての証明
$m_1/n_1=m_2/n_2$（$m_1,m_2 \in \mathbb{Z},\ n_1,n_2 \geq 1$）であるとき $a^{m_1/n_1}=a^{m_2/n_2}$ を示す。
特に $m_1/n_1=m_0/n_0$（$m_1,m_0 \in \mathbb{Z},\ n_1,n_0 \geq 1,$ **m_0/n_0は既約分数**）であるときの成立を示せばよい。（$m_1/n_1=m_0/n_0=m_2/n_2$ であるから $a^{m_1/n_1}=a^{m_0/n_0}=a^{m_2/n_2}$ の成立が言えるため。）
このとき $m_1=km_0,\ n_1=kn_0$ なる $k \geq 1$ が存在。すると

$$\left(\sqrt[kn_0]{a}\right)^k=\sqrt[n_0]{a}$$

が成立。実際 $x=\sqrt[kn_0]{a}$ (>0) とすれば、定義９（１）より $x^{kn_0}=a$ であり定理２より特に

$$(x^k)^{n_0}=x^{kn_0}=a$$

が成立し、補題 10 より $x^k>0$ であるから $s^{n_0}=a$ となる正の実数 s は唯一で

$$x^k=\sqrt[n_0]{a}$$

が成立する。以上より先程の式が成立し

$$a^{m_1/n_1}=\left(\sqrt[n_1]{a}\right)^{m_1}=\left(\sqrt[kn_0]{a}\right)^{km_0}=\left(\left(\sqrt[kn_0]{a}\right)^k\right)^{m_0}=\left(\sqrt[n_0]{a}\right)^{m_0}=a^{m_0/n_0}$$

以上より定義９内のものは約分によらず一定の値をとる。

上記証明において k は単なる整数ではなく 0 より大きい自然数である。もし 0 以下の自然数であれば $n_1 = kn_0$ を満たさないからである。また、上記証明において「ある方程式において解は唯一存在していると知っていて、その方程式に２つ解を見つけたならばそれらは等しい」ということを使っている。この方法は全く異なる表示のものが実は同じものであることを使うことで予想していなかったような事実を発見することができる大変エレガントな方法である。他にもこうした方法がとられる処として微分方程式での解の一意性の話がある。このエレガントさをわかって頂けると筆者はうれしいこと限りなしである。

定理 11（指数を有理数に拡張した際の指数法則の成立）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $q, r \in \mathbb{Q}$ とする。
このとき、以下の２式が成立。
（１） $a^{q+r} = a^q a^r$
（２） $a^{qr} = (a^q)^r$

（証明）
$q = m_1/n_1\, , r = m_2/n_2$ （$m_1, m_2 \in \mathbb{Z},\ n_1, n_2 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$）とできるので、下記（★）に注意して
（１） $a^{q+r} = a^{m_1/n_1 + m_2/n_2} = a^{(m_1 n_2 + m_2 n_1)/n_1 n_2} = \left(\sqrt[n_1 n_2]{a}\right)^{m_1 n_2 + m_2 n_1}$ が成立しており最右辺は $m_1 n_2 + m_2 n_1 \in \mathbb{Z}$ であることに注意して定理６（２）を用いれば

$$\left(\sqrt[n_1 n_2]{a}\right)^{m_1 n_2 + m_2 n_1} = \left(\sqrt[n_1 n_2]{a}\right)^{m_1 n_2}\left(\sqrt[n_1 n_2]{a}\right)^{m_2 n_1} = \left(\sqrt[n_1]{a}\right)^{m_1}\left(\sqrt[n_2]{a}\right)^{m_2}$$
$$= a^{m_1/n_1} a^{m_2/n_2} = a^q a^r$$

（２） $a^{qr} = a^{m_1 m_2/n_1 n_2} = \left(\sqrt[n_1 n_2]{a}\right)^{m_1 m_2} = \left(\left(\sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a}}\right)^{m_1}\right)^{m_2} = \sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a}^{m_1}}^{\,m_2}$

$$= \left(a^{m_1/n_1}\right)^{m_2/n_2} = (a^q)^r$$

と式変形できる。

□

（★）上記証明で以下の事実を使っている。
(A) $\sqrt[n_1 n_2]{a} = \sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a}}$
(B) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
（証明）
(A) $x = \sqrt[n_1 n_2]{a}\ (>0)$ とすれば、定義９（１）と定理２を用いると

$$(x^{n_2})^{n_1} = x^{n_1 n_2} = a$$

が成立する。ところで $x^{n_2} > 0$ であり、補題 10 より $y^{n_1} = a$ となる $y(>0)$ は唯一存在して $\sqrt[n_1]{a}$ であるから

$$x^{n_2} = \sqrt[n_1]{a}$$

である。さらに補題 10 を用いると $y^{n_2} = \sqrt[n_1]{a}$ となる $y(>0)$ は唯一存在して $\sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a}}$ であるので

$$\sqrt[n_1 n_2]{a} = x = \sqrt[n_2]{\sqrt[n_1]{a}}$$

が証明できる。

（B）　$x = \sqrt[n]{a}\,(>0)$ とすれば、定義９（１）より

$$x^n = a$$

がいえる。定理２を用いると

$$(x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m = a^m$$

が成立する。ここで $a^m > 0$ であり $x^m > 0$ に注意すれば、補題 10 より $y^n = a^m$ となる $y(>0)$ は唯一存在して $\sqrt[n]{a^m}$ であるので

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = x^m = \sqrt[n]{a^m}$$

□

上記証明で、先ほどと同様に「ある方程式において解は唯一存在していると知っていて、その方程式に２つ解を見つけたならばそれらは等しい」ということを使っている。さて、大小関係に関する事実は指数を有理数に拡張してもこれまでと同様の結果が得られる。

定理 12（指数を有理数に拡張した際の指数に対する大小関係）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $q, r \in \mathbb{Q}$ とする。
このとき、各場合について以下が成立。
（１）　$a^r > 0$
（２）　$a > 1,\ q < r \ \Rightarrow\ a^q < a^r$
（３）　$0 < a < 1,\ q < r \ \Rightarrow\ a^q > a^r$

※（３）の場合は $a^q = (1/a)^{-q}$ であることが定理 11（２）より成立し（２）より直ちに成立。

（証明）

（１）　$r = m/n$ （$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$）とすることができ、定義９から $\sqrt[n]{a} > 0$ に注意して

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a}^m > 0$$

（２）　$a^r - a^q = a^q a^{r-q} - a^q = a^q(a^{r-q} - 1)$ であるから

$$s > 0 \Rightarrow\ a^s > 1 \quad (s \in \mathbb{Q})$$

を示せばよい。$s = k/l$ （$k, l \geq 1$）とできるから $a^{1/l} > 1$ を示せばよい。これは補題 10 の証明中で $a > 1$ であるとき $f(x) = x^l - a$ とすれば $f(1) = 1 - a < 0$ となるので f は連続な関数でかつ $[1, a+1]$ は連結な集合となり、中間値の定理より

$$\exists x \in (1, a+1), f(x) = 0$$

がわかる。このような x が唯一であることは既に証明してあるから $a^{1/l} > 1$

□

定理 13（指数を有理数に拡張した際の底に対する大小関係）
$a,\ b \in \mathbb{R}+$ かつ $r \in \mathbb{Q}$ とする。
このとき、以下が成立。
（１）　$r > 0,\ b > a > 1 \Rightarrow b^r > a^r$
（２）　$r < 0,\ b > a > 1 \Rightarrow b^r < a^r$

※　$r=0$ の場合は $b^r,\ a^r$ はともに 1 の値をとるので大小関係をつけるのは trivial な（自明な）例として記載していない。

（証明）

以下の証明で次式が成立することに注意。

$$(st)^r = s^r t^r\ (s,t \in \mathbb{R}+, r \in \mathbb{Q})$$

上式は $r = m/n$ （$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$）とすることができ

$$(st)^r = (st)^{m/n} = \sqrt[n]{st}^{\,m} = \left(\sqrt[n]{s}\sqrt[n]{t}\right)^m = \sqrt[n]{s}^{\,m}\sqrt[n]{t}^{\,m} = s^{m/n}t^{m/n} = s^r t^r$$

であることからわかる。また $\sqrt[n]{st} = \sqrt[n]{s}\sqrt[n]{t}$ に関しては $\sqrt[n]{s}\sqrt[n]{t} = x\ (>0)$ とすれば、定理 2 に注意して、$x^n = st$ であり、補題 10 より $y^n = st$ となる $y(>0)$ は唯一存在して $\sqrt[n]{st}$ であることからわかる。

また $(pq)^m = p^m q^m\ (p,q \in \mathbb{R}+, m \in \mathbb{Z})$ の成立は定理８で既に証明している。

（１）　$b^r/a^r = (b/a)^r$ となるが $r>0,\ b>a$ の条件から定理 12（２）に注意して右辺は 1 より大きい。従って、$b^r/a^r > 1$ となり、ここから $b^r > a^r$。

（２）　$r = -q$ とすれば $q>0$ であるので（１）を用いて $b^q > a^q$ が成立。以上から

$$b^r = (b^{-1})^q = (b^q)^{-1} = 1/(b^q) < 1/(a^q) = (a^q)^{-1} == a^{-q} = a^r$$

□

この章の本論に突入する。有理数までの拡張には特段難しい要素はなかったが、実数に拡張する段階で「そもそも実数とは何か」という問題に突き当たる。大学の数学の授業はこれがわかれば後はどうでもいいのではないかと筆者は勝手に思っているのだが、筆者なりに纏めると「実数とは四則演算の構造を入れた有理数列である。」といえる。ドヤ顔でいったものの、数Ｂや数Ⅲを受講していない読者には馴染がない言葉が並ぶ。そもそも「実数は値であって数列ではないじゃないか」という反論も聞こえてきそうである。そのような読者は偉大なる小平邦彦先生の「解析入門Ｉ」（岩波書店）の最初の数ページを読んでいただければと思うのであるが、解説しないのはあまりに失礼にあたるので、数多の誤解を恐れながら簡単にいうと次のようになるのではないか。**実数は単純な小数ではないが、実数を近似する有理数列がとれるので、その有理数列を実数とみなす。**ところで、「数とみなす」ことは計算ができるような構造が入っている（「代数的な」構造）ということであるが、そのことについて記載するには余白が狭すぎるので深入りするのはやめておく。興味がある読者は代数学と名の付く本を片っ端から読んでいただければよい。さて、実数を近似する列とはどのようなものか。勿論一つとは限らないが、例えば $x=\pi$ であれば近似する有理数列は以下の通りになる。

$$x_1 = 3, x_2 = 3.1, x_3 = 3.14, x_4 = 3.141, x_5 = 3.1415, \ldots$$

このように小数第何位でぶつ切りにする有理数列をとることができる。この事実を一般的に書いたのが次の命題である。

補題 14（指数を実数に拡張する際に必要な定理①）

$x \in \mathbb{R}$ とする。

このとき x に収束する単調増加な有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる。

（証明）

有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を次の条件を満たすようにとる。

(ｉ) $x_0 = x, x_1 = [x]$

(ⅱ) $y_i = \left[10^i(x_0 - x_i)\right]$ $(\forall i \geq 1)$

(ⅲ) $x_{n+1} = x_1 + \sum_{i=1}^{n} 10^{-i} y_i \,(= x_n + 10^{-n} y_n)$ $(\forall n \geq 1)$

このとき、<u>帰納的に $0 \leq y_i \leq 9$ $(\forall i \geq 1)$</u> であるが、(ⅱ)とガウス記号の性質により、

$$\forall n \geq 1, 0 \leq y_n \leq 10^n(x_0 - x_n) < y_n + 1 \leq 10$$

となる。ここから $0 \leq |x_0 - x_n| < 10^{-n+1} \to 0\ (n \to \infty)$ であって、有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は確かに x に収束する。また、この数列は(ⅲ)を満たすようにとったから $x_{n+1} - x_n = 10^{-n} y_n \geq 0$ $(\forall n \geq 1)$ であって単調増加な数列。

□

（★）下線部の詳細は以下の通り。（数学的帰納法）

(ｉ)(ⅱ)より $y_1 = [10(x_0 - x_1)] = [10(x - [x])]$ がわかり $[x] \leq x \leq [x] + 1$ であるので

$$0 \leq x - [x] < 1$$

が成立。ここから $0 \leq 10(x - [x]) < 10$ なので $[10(x_0 - x_1)]$ は 0 以上 10 未満の整数で

$$0 \leq y_1 \leq 9$$

である。次に $i = k$ において下線部の命題が成立しているとする。このとき、ガウス記号の性質より

$$y_k \leq 10^k(x_0 - x_i) < y_k + 1$$

であるので $0 \leq 10^{-k} y_k \leq x_0 - x_k < 10^{-k}(y_k + 1) < 10^{-k} y_k + 10^{-k}$ が成立し

$$0 \leq x_0 - x_k - 10^{-k} y_k < 10^{-k}$$

となる。さらに(ⅲ)より

$$x_{k+1} = x_k + 10^{-k} y_k$$

であることに注意すると

$$0 \leq x_0 - x_{k+1} < 10^{-k}$$
$$0 \leq 10^{k+1}(x_0 - x_{k+1}) < 10$$
$$0 \leq y_{k+1} \leq 9$$

となり、$i = k + 1$ において下線部の命題が成立するので $\forall i \geq 1$ で下線部の命題は成立。

補題 14 の証明は文字式で一般化されており一見複雑そうである。しかし実情はある実数に対し、有理数列として小数の近似列をとっているだけである。（むしろ証明の発想がそこにある。）実際 $x = \pi$ であればとる有理数は以下の通り。

$$x_1 = 3, x_2 = 3.1, x_3 = 3.14, x_4 = 3.141, x_5 = 3.1415, \ldots$$

勿論作り方から単調増加であるのも x に収束するのも明らかである。さて、補題 14 のような有理数列をとれば、「実数列が有界で単調ならば収束先がある」という実数の性質を用いて以下の命題が直ちに成立する。

補題 15（指数を実数に拡張する際に必要な定理②）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $x \in \mathbb{R}$ とする。
この x に対し、補題 14 の証明にあるような有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとったとき

$$\exists \lim_{n\to\infty} a^{(x_n)}$$

（証明）
$a > 1$ のときを証明する。$a = 1$ のときは $a^{(x_n)}$ の値は常に 1 であり $0 < a < 1$のときは下記証明の符号が逆になるので、上界の存在ではなく、下界の存在を証明に使う。
補題 14 の証明にある有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加で $a^{[x]+1}$ は指数が整数であるから値が定義できていることに注意して、定理 12 を用いて

$$0 < a^{(x_n)} < a^{(x_{n+1})} < a^{[x]+1} \quad (\forall n \geq 1)$$

である。以上より、実数列 $\left\{a^{(x_n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加かつ上界が存在し、収束。

□

補題 15 の成立を受けて、天下り的ではあるものの指数を有理数から実数へと拡張する。これは本節の目的でもあった。余談であるが、下記のように定義できるのは定理 12 で見たような指数の単調性と実数の「部分集合が有界で単調ならば収束先がある」という性質に依っている。これはあたかも「有理数から実数を構築する」ように「指数を有理数から実数に拡張している」ことを指す。これは既に大小関係が決まっている直線上に新たな数を入れていく作業に似ている。（例えば、π を 3.14 と 3.15 の間に入れていく作業を思い浮かべていただけるといい。）この隙間を埋めていく作業を専門用語では「完備化」というのだが、この作業を指数の構築においても使わざるを得ないという処が興味深い。（筆者にとってだけかもしれない。）勿論、ここから直観的に指数関数が連続であるのはわかるがこれを定理 22 で示す。

定義 16（指数の実数に関しての拡張）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $x \in \mathbb{R}$ とする。
このとき x に対し、補題 14 の証明にあるような有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとり

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{(x_n)}$$

と定める。このとき a^x に対し a を底、x を指数という。

※ 定義の右辺の式の値が実数として存在することは補題 15 が担保している。

ところで、定義 16 の形では使いにくい。というのも実数を近似するときの列は補題 14 のような列でないといけないという制約がかかるからである。そこで、次の補題を示すことによって来るべき定理 18 の証明を円滑に行えるように準備しておく。

補題 17（収束する有理数列は単調増加であれば、適当にとればよい。）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $x \in \mathbb{R}$ とする。
このとき x に対し、補題 14 の証明にあるような有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と x に収束する別の単調増加な有理数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとると

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{(x_n)} = \lim_{n\to\infty} a^{(y_n)}$$

以上により、収束する有理数列は補題 14 に限らず、適当にとればいい。

（証明）
$a > 1$ のときを証明する。他の場合は補題 15 の証明と同様のことがいえるから省略。 x に対し、補題 14 の証明にあるような有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとる。
(ｉ) $\forall n \in \mathbb{N}, x_n < x$ の場合
このとき $\forall n \in \mathbb{N}, x - x_n > 0$ であるから x に収束する別の単調増加な有理数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとると

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m_k \in \mathbb{N}\ (n \geq m_k \Rightarrow\ x - y_n < x - x_k)$$

ところで $n_k = \max\{m_k, n_{k-1} + 1\}$ と帰納的に定めることで $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して $x_k < y_{n_k} \leq x$ であり、定理 12 から特に $a^{x_k} < a^{y_{n_k}} \leq a^x$ であるので、はさみうちの原理より

$$\lim_{k\to\infty} a^{\left(y_{n_k}\right)} = a^x$$

ところで、定理 12 から $\left\{a^{(y_n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ も単調増加で上界 $a^{[x]+1}$ をもつから収束。したがって、その部分列である $\left\{a^{\left(y_{n_k}\right)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ が a^x へ収束するので $\left\{a^{(y_n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ の収束先も a^x。

(ⅱ) $\exists n \in \mathbb{N}, x_n = x$ の場合
有理数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $z_0 = [x] - 1, z_{n+1} = (z_n + x)/2\ (\forall n \in \mathbb{N})$ と帰納的に定めると $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有理数列であり、単調増加かつ x に収束。このとき $\forall n \in \mathbb{N}, x - z_n > 0$ であるから x に収束する別の単調増加な有理数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとると

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m_k \in \mathbb{N}\ (n \geq m_k \Rightarrow\ x - y_n < x - z_k)$$

となる。ところで $n_k = \max\{m_k, n_{k-1} + 1\}$ と帰納的に定めることで $\forall k \in \mathbb{N}$ に対して $z_k < y_{n_k} \leq x$ であり、定理 12 から特に $a^{z_k} < a^{y_{n_k}} \leq a^x$ であるので、はさみうちの原理より

$$\lim_{k\to\infty} a^{\left(y_{n_k}\right)} = a^x$$

ところで、定理 12 より $\left\{a^{(y_n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ も単調増加で上界 $a^{[x]+1}$ をもつから収束。したがって、その部分列である $\left\{a^{\left(y_{n_k}\right)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ が a^x へ収束するので $\left\{a^{(y_n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ の収束先も a^x。

□

さて、本章でのお決まりタイム。定義の拡張が意味を逸脱していないかを確認するときが来た。証明は定理 11 を使うのだが、定理 18（２）は後の注意にもあるように後に証明している定理を用いている。循環論法になっていないことに留意しておく。

定理 18（指数を実数に拡張した際の指数法則の成立）
$a \in \mathbb{R}+$ かつ $x,\ y \in \mathbb{R}$ とする。
このとき、以下の２式が成立。
（１） $a^{x+y} = a^x a^y$
（２） $a^{xy} = (a^x)^y$

（証明）
（１） $a = 1$ のときは $a^{(x_n)}$ の値は常に１であるので自明。$a \neq 1$であるとする。このとき $x,\ y$ にそれぞれ収束する単調増加な有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとることができて補題 17 より

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{(x_n)}$$
$$a^y = \lim_{n\to\infty} a^{(y_n)}$$

ところで $\forall n \geq 1$ に対して x_n，y_n は共に有理数であって定理 11 を用いて

$$a^{x_n+y_n} = a^{x_n} a^{y_n}$$

ここで $x_n + y_n \to x + y\ (n \to \infty)$ であり $\{x_n + y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加であることに注意すると補題 17 を用いて

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{(x_n+y_n)} = \lim_{n\to\infty} a^{(x_n)} a^{(y_n)} = \lim_{n\to\infty} a^{(x_n)} \lim_{n\to\infty} a^{(y_n)} = a^x a^y$$

の成立がわかる。

（２） $a = 1$ のときは $a^{(x_n)}$ の値は常に 1 であるので自明。$a \neq 1$であるとする。

$$a^{xr} = (a^x)^r \quad (x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q})$$

をまず示す。 x に収束する狭義単調増加である有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとることができる。ここで、有理数列 $\{x_n r\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加であり $x_n r \to xr\ (n \to \infty)$ であるので、補題 17 また後に証明する定理 22（２）を用いれば、指数関数 a^r は連続であり、さらに $a^{(x_n)} \to a^x\ (n \to \infty)$ であることに注意して

$$a^{xr} = \lim_{n\to\infty} a^{(x_n r)} = \lim_{n\to\infty} (a^{x_n})^r = (a^x)^r$$

上記を踏まえれば y に収束する有理数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとることができて $xy_n \to xy\ (n \to \infty)$ であるので後に証明する定理 23 を用いて

$$a^{xy} = \lim_{n\to\infty} a^{(xy_n)} = \lim_{n\to\infty} (a^x)^{y_n} = (a^x)^y$$

□

（★）定理 18（２）の証明について
後に使う定理 22（２）や定理 23 を用いて証明しているが、この証明は指数関数が単調増加であることが肝であり、これはさらに定理 18（１）より導出される。したがって循環論法になっていないことに注意する。また、「$a^{xy} = \lim_{n\to\infty} a^{(xy_n)}$」の部分では定義 16 からの結果ではない。 $\{xy_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ はもはや有理数列でないからである。したがってここで定理 23 を用いる必要が出てくる。

これまでと同様に指数に関して定理 19 や定理 20 のような大小関係がある。この事実は後の定理 22 を証明する時に用いることを留意しておく。そもそも最初は取り上げる必要性を感じていなかったが、定理 22 の証明においてこの事実が使う必要があると気づき、指数が自然数のときからこの定理を取り上げている。指数を有理数から実数へ拡張するときはどうしても大小関係が絡んでくるのは先程話した「完備化」の話が大いに関係していると思われる。

> 定理 19（指数を実数に拡張した際の指数に対する大小関係）
> $a \in \mathbb{R}+$ かつ $x, y \in \mathbb{R}$ とする。
> このとき、各場合について以下が成立。
> （１） $a^x > 0$
> （２） $a > 1,\ x < y \ \Rightarrow\ a^x < a^y$
> （３） $0 < a < 1,\ x < y \ \Rightarrow\ a^x > a^y$

※（３）の場合は $a^x = (1/a)^{-x}$ であることが定理 18（２）より成立し、（２）より直ちに成立。

（証明）

（１） 補題 14 の証明にある x に収束する有理数列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$をとることができて定理 12 から

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{(x_n)} \geq 0$$

一方 $a^x \neq 0$ であるので $a^x > 0$。実際 $a^x = 0$ となるような $x \in \mathbb{R}$ が存在したとする。このとき $-x \in \mathbb{R}$ であり、定理 18（１）より $0 = a^x a^{-x} = a^0 = 1$ となり矛盾。

（２） $a > 1,\ x < y$ とする。$x,\ y$ に対し、定理 18（１）を用いると、

$$a^y - a^x = a^x(a^{y-x} - 1)$$

が成立する。したがって

$$s > 0 \ \Rightarrow\ a^s > 1$$

を示せばよい。補題 14 にあるような単調増加な s に収束する有理数列 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとることができ $|s - s_n| \to 0\ (n \to \infty)$ であるから

$$\exists N \geq 1\ (n \geq N \Rightarrow\ |s - s_n| < s/2)$$

がわかる。上記のような N をとったとき「 $n \geq N$ ならば $-s/2 < s - s_n < s/2$ 」であるから

$$s_n > s/2 > 0$$

が成立。以上より定理 12（１）を用いて

$$\forall n \geq 1, a^{s_n} > a^0 = 1$$

がわかる。また $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調増加な数列で $\{a^{s_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ も単調増加な数列になり、さらに定義 16 より

$$\forall n \geq 1, a^s = \lim_{n\to\infty} a^{(s_n)} \geq a^{s_{n+1}} > a^{s_n} > 1$$

□

定理 20（指数を実数に拡張した際の底に対する大小関係）
$a, b \in \mathbb{R}+$ かつ $x \in \mathbb{R}$ とする。
このとき、以下が成立。
（１） $x > 0,\ b > a \Rightarrow b^x > a^x$
（２） $x < 0,\ b > a \Rightarrow b^x < a^x$

※ $x = 0$ の場合は $b^x,\ a^x$ はともに 1 の値をとるので大小関係をつけるのは trivial な（自明な）例として記載していない。

（証明）
以下の証明で次式が成立することに注意。

$$(st)^x = s^x t^x \ (a, b \in \mathbb{R}+, x \in \mathbb{R})$$

補題 14 の証明にある x に収束する有理数列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$をとることができて

$$(st)^x = \lim_{n\to\infty}(st)^{x_n} = \lim_{n\to\infty} s^{x_n} t^{x_n} = s^x t^x$$

また、定理 18（２）に注意すれば

$$(b/a)^x = b^x(1/a)^x = b^x(a^{-1})^x = b^x(a^x)^{-1} = b^x/a^x$$

（１） $b^x/a^x = (b/a)^x$ となり $x > 0,\ b > a$ の条件より定理 19（２）に注意すれば右辺は 1 より大きい。従って、$b^x/a^x > 1$ となる。ここから $b^x > a^x$。
（２） $x = -y$ とすれば $y > 0$ であって（１）より $b^y > a^y$ が成立。定理 18（２）より

$$b^x = b^{-y} = (b^y)^{-1} = 1/(b^y) < 1/(a^y) = (a^y)^{-1} = a^{-y} = a^x$$

□

指数関数を定義する。関数の定義についてはググってもらえればよい。もしくは集合論と名のつく本を片っ端から読めば直ちに了解されるだろう。行先が実数値である対応のことである。

定義 21（指数関数）
$a \in \mathbb{R}+$ とする。
このとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し、定義 16 より $a^x \in \mathbb{R}$ が定まる。
この $x \in \mathbb{R}$ に対し $a^x \in \mathbb{R}$ を定める対応を指数関数といい、これを a^x で表すことにする。

※ある実数 a^x と指数関数 a^x は表現こそ同じだが意味するところは全く異なる。前者はある一つの具体的な値を、後者は対応を表している。

次の定理 22 が本節の目的である。証明では、指数が実数のものを指数が有理数のもので評価しているところがやや技巧的である。しかし、これは振る舞いがわからない関数の極限を既に振舞いのわかっている数列の極限に帰着させるというこれまたよくある発想なのである。

定理 22（指数と極限の関係）
$a \in \mathbb{R}_+$ とする。
このとき、以下が成立する。
（１） $\lim_{x\to 0} a^x = 1$
（２） 指数関数 a^x は実数において連続である。

（証明）
（１） $a > 1$ で示す。$a = 1$ では trivial（自明）であるし $a < 1$ に対しては $b = 1/a$ で帰着できる。さて $a > 1$ では定理 19（２）より関数 a^x は単調増加であり、実数列 $\{a^{1/n}\}_{n\geq 1}$ は単調減少数列。また、単調性より下界として $a^0 = 1$ がとれるので $\exists \lim_{n\to\infty} a^{1/n}$。
ここで $\{a^{1/n}\}_{n\geq 1}$ は単調減少数列であったから $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \inf_{n\geq 1} a^{1/n} = 1$ 。すると、任意に $\varepsilon\ (>0)$ をとれば
$$\exists N \geq 1, (n \geq N \Rightarrow \left|a^{1/n} - 1\right| < \varepsilon)$$
ここでさらに $\delta = 1/N$ とすれば、関数 a^x は単調増加であるから $|x| < \delta$であるとき
$$a^{-1/N} < a^{-|x|} < a^0 < a^{|x|} < a^{1/N}$$
となるので
$$|a^x - 1| < \left|a^{1/N} - 1\right| < \varepsilon$$
が成立し $\lim_{x\to 0} a^x = 1$。
（２） $p \in \mathbb{R}$ を任意にとる。 a^x が $x = p$ において連続であることを示せばよい。 $|a^p - a^x| = |a^p||a^{x-p} - 1|$ に注意しておく。さて、（１）より任意に $\varepsilon(>0)$ をとると
$$\exists \delta > 0, (|x| < \delta \Rightarrow |a^x - 1| < \varepsilon/|a^p|)$$
である。このような δ をとれば $|x - p| < \delta$ のときに
$$|a^p - a^x| = |a^p||a^{x-p} - 1| < |a^p|(\varepsilon/|a^p|) = \varepsilon$$
となるので $\lim_{x\to p} a^x = a^p$ が成立し、指数関数 a^x の $x = p$ における値も a^p であるから a^x が $x = p$ において連続。

□

（★）「単調減少かつ下界がある実数列は下限が存在し、下限に収束。」の証明について
$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を単調減少かつ下界がある実数列とする。下界を s とすると
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq s$$
であり $\mathbb{R}$ の部分集合である $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は空集合でなく $\exists \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$。これを α とすれば下限の定義から
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, a_N < \alpha + \varepsilon$$
が成立。実際もし「 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \alpha + \varepsilon_0$ 」であれば、このような ε_0 をとったとき
$$\alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \geq \alpha + \varepsilon_0$$
となるので矛盾。さて上式でとった N に対し $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は単調減少であるから
$$n \geq N \Rightarrow \alpha = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq a_n \leq a_N < \alpha + \varepsilon$$
がわかる。特に「 $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ 」が成立。よって $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は下限 α に収束。

（★）「$a > 1$ において $\inf_{n \geq 1} a^{1/n} = 1$」の証明

$a > 1$ であることに注意する。定理 19（２）より $\forall n \geq 1, a^{1/n} > a^0 = 1$ であるから

$$\inf_{n \geq 1} a^{1/n} \geq 1$$

ここで $\inf_{n \geq 1} a^{1/n} = \alpha > 1$ とすれば、下限の定義より $\forall n \geq 1, a^{1/n} \geq \alpha > 1$ であるので、さらに $\forall n \geq 1, a \geq \alpha^n$ が成立。ところで $\alpha > 1$ であるから二項定理を用いて、

$$\alpha^n = \left(1 + (\alpha - 1)\right)^n > 1 + n(\alpha - 1)$$

となるので $\lim_{n \to \infty} 1 + n(\alpha - 1) = \infty$ より $\lim_{n \to \infty} \alpha^n = \infty$ がいえる。すると

$$\exists N \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \alpha^N > a)$$

となり、これは $\forall n \geq 1, a \geq \alpha^n$ に矛盾。

定理 23（一つのゴール、収束する列は実数列で OK。）
$a \in \mathbb{R}_+$ かつ $x \in \mathbb{R}$ とする。
このとき、x に対し、x に収束する実数列$\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$をとれば、$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{(y_n)}$

※以上は定理 22 から直ちに成立。

（証明）

定理 22 より指数関数 a^x は実数において連続であるので x に収束する実数列 $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を任意にとれば

$$a^x = \lim_{n \to \infty} a^{(y_n)}$$

□

（★）関数の連続性について

次の(ｉ)(ⅱ)は同値である。片方の矢印は明らかで、他方は数列を構成するときに選択公理を用いればよい。

X は距離空間で $x \in X$ とする。

(ｉ) 関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が x において連続。

(ⅱ) 関数 $f: X \to \mathbb{R}$ において x に収束する X の任意の点列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ に対し

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$$

以上の命題は x へどのように近づいても f が連続の場合は f を施した値は $f(x)$ に近づいていくことを表している。

節末問題

$\boxed{1}$

有理数 x に対し、定義 9 と定義 16 で定めた a^x の値が一致することを証明せよ。
例えば、$a^{1/3}$について有理数のときの定義と実数の定義では定め方が異なる。

（hint:定理 23 により、x の近似列として実数列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$を $x_n = x\ (\forall n \in \mathbb{N})$ とすればよい。）

（解答）
有理数 x の近似列として実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $x_n = x\ (\forall n \in \mathbb{N})$ が成立するようにとれば明らかに $x_n \to x\ (n \to \infty)$ であって

$$\forall n \in \mathbb{N}, a^{x_n} = a^x$$

上式の右辺は有理数の指数で定義された値。ここで、定理 23 より $\lim_{n\to\infty} a^{x_n}$ が実数の指数で定義された値であるが、上式よりこの値は a^x に等しい、つまり有理数の指数で定義された値に等しい。

$\boxed{2}$

$$a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0\ \ (x \in \mathbb{R})$$

の成立を定義 16 の指数の定め方に沿って証明せよ。

（解答）
$x = 0$ とすれば、前問より有理数で定めたときの値と等しく $a^x = a^0 = 1$ が成立。
$x \neq 0$ とすれば $a^x \neq 1$ であるから逆方向も成立。実際 $a > 1$ であれば $a^x > a^0 = 1$ となり $a < 1$ であれば $a^x < a^0 = 1$ となるからどちらの場合も $a^x \neq 1$ となる。

$\boxed{3}$

定義 1 , 5 , 9 ,16 で定めた a^x は実数値をとることを前提に論を進めている。この事実を証明せよ。
（でないと、定義 21 で定めたものは関数とはいえないし、各定理で用いている乗法や加算の演算もよくわからない。）

（解答）
$x \geq 1$ であるときは a^x は実数 a を x 個かけ合わせた値であるから実数。 $x \in \mathbb{Z}$ であるときは $x > 0$ ならば先ほどと同じ。 $x = 0$ ならば $a^x = 1$ となり値は実数。$x < 0$ ならば先ほど示したように a^{-x}が実数であるからその逆数のa^xも実数。 $x \in \mathbb{Q}$ のときは $x = m/n$ （$m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$）とで

きて補題 10 より $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ であるから先ほどの整数の場合での成立に注意して $a^x = \sqrt[n]{a}^m \in \mathbb{R}$ がわかる。最後に $x \in \mathbb{R}$ のときは補題 15 の証明から a^x の値は実数。

$\boxed{4}$

$s \in \mathbb{R}$ のとき $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^s$ で定める。このとき f が連続であることを証明せよ。

（解答）

$s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ であるときは連続な関数 $g_1(x) = x$ の有限個の積をとった関数であるから連続。 $s \in \mathbb{Z}$ であるときは連続な関数 $g_1(x) = x$ や $g_2(x) = 1/x$ の有限個の積で表されるから連続。 $s \in \mathbb{Q}$ のときは $g_3(x) = \sqrt[n]{x}$ が連続であることを示せばよいがこれは $h(x) = x^n$ が狭義単調増加であり、$h: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ が全単射で $h\big((a, b)\big) = (a^n, b^n)$ であるから h は開写像であり、特に $g_3 = h^{-1}$ は連続。（急場しのぎ感が凄いので他にいい証明あれば求ム。）最後に $s \in \mathbb{R}$ であるとする。このとき、補題 14 により s に収束する単調増加な有理数列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ がとれる。すると、先より $f_n(x) = (x)^{s_n}$ は連続であることを用いて $x, y \in (0, \infty)$ に対して

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$
$$f(y) = \lim_{n \to \infty} f_n(y)$$
$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

がそれぞれわかるので $s \in \mathbb{R}$ に対しても成立。

□