０－２ネイピア数の諸性質

この節では、ネイピア数についてよく知られた事実を整理している。高校数学では定義１のように定義していることが多い。その所以を筆者は知らないが、定理５のような無限級数の形ではどうしても入試問題が作成しにくいという弊害が起こるからではないだろうか。一方でどちらの定義から始めようともそれらの一致は定理５により確認できるのだが、とりあえず決め打ちで定義１から話を始めることにする。数学的な事象を述べる際に様々な流派があるのは、正にこうした「どの定義から出発するか」という話を発端にするわけであるが、最終的には同じ結論に行き着くわけで「どの定義の仕方が正しいか」より「どの定義の仕方が自分にとって整理しやすいか」（さらにいえば「どちらが説明している相手にわかりやすいか」）ということがより重要なのではないだろうか。

本節は前節と同様の点（意味の拡張）に注意して読まれるとよいだろう。

また一方で数学的な観点としては以下の点について学習できる。
・ネイピア数が生まれた背景、ネイピア数の定義及びその性質
・ネイピア数の無限級数表示（これは後に無限級数で指数関数を定義するときの妥当性を担保する）
・関数の極限を数列の極限に帰着させる手法
・指数関数と微分の関係

以上に留意し、取り組んでほしい。

前節で指数関数が連続であることをみた。さて、次に気になる問題は指数関数を微分するとどうなるのかということである。というのも微分をすることで、関数のある点の付近での振舞いを線形的な近似で表現できるからである。（つまり y の変化を x の変化の定数倍で近似することができる。）接線はそれを可視化したものである。したがって、関数を知れば微分したくなるのは数学に携わるものにとって自然な欲求なのだ。

さて、指数関数 $f(x)=a^x$ の $x=t$ における微分係数の極限をとる前の値は

$$(f(t+h)-f(t))/h=(a^{t+h}-a^t)/h=a^t((a^h-1)/h)$$

である。ここで仮に

$$\lim_{h\to 0}(a^h-1)/h=1$$

となるような正の a が存在したとして、これを一旦 e と書き、指数関数 $g(x)=e^x$ の微分を考えれば

$$\lim_{h\to 0}(g(t+h)-g(t))/h=\lim_{h\to 0}e^t((e^h-1)/h)=e^t\lim_{h\to 0}(e^h-1)/h=e^t$$

となるので

$$g'(t)=g(t)$$

という面白い関係性が導ける。この関係性に注目すれば、底が他の正の実数である指数関数の微分も

することができる。では

$$\lim_{h\to 0}(e^h-1)/h=1$$

となる e は本当に存在するのだろうか。実は存在していて、定義 1 のように表される実数であるとわかる。そこで本節では定義 1 で定義した e が実際に

$$\lim_{h\to 0}(e^h-1)/h=1$$

を満たし、さらに e を底とする指数関数は微分すると元の関数に戻ることをみていく。そして、本節を最後まで読めば、微分して元の関数と同じ関数になるのは（底がネイピア数の）指数関数のみがもつ性質であることも了解されるだろう。

定義 1 （ネイピア数の定義）

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$$

の値が存在するが、これをネイピア数といい e で表す。

※下線部「値が存在する」の部分は証明する必要がある。次の練習問題で証明する。

ネイピア数の存在は「有界な単調数列には収束先が存在する」ことを用いれば証明できる。この事実は極限の存在の証明にしばしば表れる。（前節でもこの事実を幾らかの定理の証明に使った。）

練習問題 2 （ネイピア数の存在）

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$$

の値が存在することを証明せよ。

（証明）

$\{a_n\}_{n\geq 1}$ を $a_n=(1+1/n)^n$ という数列とする。このとき、下記に示すように $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は単調増加かつ上に有界。したがって $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は収束する。

（単調増加であること）

$\forall n\geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}a_{n+1}/a_n&=\left(1+(1/(n+1))\right)^{n+1}/\left(1+(1/n)\right)^n=\left(1+(1/(n+1))\right)n(n+2)/((n+1)^2)\\&=n(n+2)^2/(n+1)^3\end{aligned}$$

であるが、最右辺において分子から分母を減算したものは

$$n(n+2)^2-(n+1)^3=n^2+n-1=(n+1/2)^2-5/4$$

ここで $n\geq 1$ であり、右辺は正。したがって $a_{n+1}/a_n>1$ が成立。これにより $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は単調増加。

（上に有界）

二項定理を用いれば $\forall n\geq 1$ に対し

$$a_n=\left(1+(1/n)\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1/n)^k=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}(1/n)+\binom{n}{2}(1/n)^2+\cdots+\binom{n}{n}(1/n)^n$$
$$=1+1+(1/n)^2\,n(n-1)/(2!)+\cdots+(1/n)^n\,n(n-1)(n-2)\ldots 1/(n!)$$
$$\leq 1+1+1/2+1/2^2+\cdots+1/2^{n-1}\leq 1+\sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k=3$$

よって上界として３がとれ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は上に有界。

□

指数法則や極限演算の諸公式を用いると次のような極限を求められる。（本論には関係ないが、理解のため一読することを勧める。）

練習問題３

以下の値を求めよ

（１） $\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^{-n}$

（２） $\lim_{n\to\infty}(1+1/(n(n+1)))^{n^2}$

（解答）

（１） 前節で論じた指数法則を用いれば $\forall n\geq 2$ に対し

$$(1-1/n)^{-n}=((1-1/n)^{-1})^n=(n/(n-1))^n=(1+1/(n-1))^n$$
$$=(1+1/(n-1))(1+1/(n-1))^{n-1}$$

である。さらに極限の四則演算に関する公式とネイピア数の定義により

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/(n-1))=1$$
$$\lim_{n\to\infty}(1+1/(n-1))^{n-1}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$$

がいえて、最初の式に再び極限の四則演算に関する公式を用いて

$$\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^{-n}=\lim_{n\to\infty}(1+1/(n-1))(1+1/(n-1))^{n-1}=e$$

（２） （１）と同様に

$$(1+1/(n(n+1)))^{n^2}=(1+1/(n(n+1)))^{n(n+1)}(1+1/(n(n+1)))^{-n}$$
$$=(1+1/(n(n+1)))^{n(n+1)}((1+1/(n(n+1)))^n)^{-1}$$
$$\lim_{n\to\infty}(1+1/(n(n+1)))^{n(n+1)}=e$$
$$\lim_{n\to\infty}((1+1/(n(n+1)))^n)^{-1}=1$$

の三式がそれぞれ成立していて $\lim_{n\to\infty}(1+1/(n(n+1)))^{n^2}=e$

□

（★）（１）の証明における「$\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n\geq 1}}$ **に対して** $\lim_{\boldsymbol{n\to\infty}} \boldsymbol{a_{n-1}} = \lim_{\boldsymbol{n\to\infty}} \boldsymbol{a_n}$」が成立していることの証明

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする。このとき、任意に $\varepsilon\,(>0)$ をとると、

$$\exists N \geq 1, (n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

が成立。このような N をとれば、

$$n \geq N + 1 \Rightarrow |a_{n-1} - \alpha| < \varepsilon$$

が成立。したがって $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ が成立。また、これと同様に

$$\lim_{n\to\infty} a_{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

が成立。（（２）にてこの事実を用いている。）

（★）証明内で使用した「$\lim_{\boldsymbol{n\to\infty}}((\boldsymbol{1}+\boldsymbol{1}/(\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})))^{\boldsymbol{n}})^{-\boldsymbol{1}} = \boldsymbol{1}$」について

一つ前の（★）より $\lim_{n\to\infty}(1+1/(n(n+1)))^{n(n+1)} = e$ であり $e/2 > 0$であるから

$$\exists N \geq 1, \left(n \geq N \Rightarrow \left|(1+1/(n(n+1)))^{n(n+1)} - e\right| < e/2\right)$$

このような N に対し、$n \geq N$ ならば、

$$e/2 < \left(1+1/\left(n(n+1)\right)\right)^{n(n+1)} < 3e/2$$

が成立するので

$$(e/2)^{1/n+1} < \left(1+1/\left(n(n+1)\right)\right)^{n} < (3e/2)^{1/n+1}$$

であるが前節で示したように $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ であったからはさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/(n(n+1)))^n = 1$$

がいえる。これの逆数に関する極限を考えて、

$$\lim_{n\to\infty}((1+1/(n(n+1)))^n)^{-1} = 1$$

が成立。

次の定理４でわかるように、ネイピア数は関数の極限でも表現できる。さて、証明するには関数の単調性を活かして関数の極限を、ガウス記号などによって数列の極限に帰着させればよい。

定理４

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$$

が成立。

（証明）

$n=[x]$ とする。 $x\to\infty$ の極限値を考えるので、最初から $n>0$ で考えればよい。（ $\varepsilon\delta$論法を用いるので、大きな x に関する話をいえばよく、最初から正の x を考えればよい。）さて $n\le x<n+1$ より $0<1/(n+1)<1/x\le 1/n$ であり前節の定理 20 より

$$(1+1/(n+1))^x<(1+1/x)^x\le(1+1/n)^x$$

がいえて、さらに底が 1 より大きい指数関数は単調増加であること（前節の定理 19）を用いれば

$$(1+1/n)^x\le(1+1/n)^{n+1}$$
$$(1+1/(n+1))^x\ge(1+1/(n+1))^n$$

が成立。したがってそれぞれを合わせると

$$(1+1/(n+1))^n<(1+1/x)^x\le(1+1/n)^{n+1}$$

が得られる。ところで、練習問題と同様にして

$$\lim_{k\to\infty}(1+1/(k+1))^k=e$$
$$\lim_{k\to\infty}(1+1/k)^{k+1}=e$$

がそれぞれ成立。以上から任意に $\varepsilon\,(>0)$ をとると

$$\exists N_1\ge 1,\left(k\ge N_1\Rightarrow\left|(1+1/(k+1))^k-e\right|<\varepsilon\right)$$
$$\exists N_2\ge 1,\left(k\ge N_2\Rightarrow\left|(1+1/k)^{k+1}-e\right|<\varepsilon\right)$$

であるので $N=\max\{N_1,N_2\}$とすると「 $k\ge N$ ならば、$\left|(1+1/(k+1))^k-e\right|<\varepsilon$ かつ$\left|(1+1/k)^{k+1}-e\right|<\varepsilon$ 」が成立する。すると $x\ge N$ ならば、$n=[x]\ge N$ であるから先ほどの不等式より

$$-\varepsilon<(1+1/(n+1))^n-e<(1+1/x)^x-e\le(1+1/n)^{n+1}-e<\varepsilon$$

特に $\left|(1+x)^{1/x}-e\right|<\varepsilon$ が成立するので

$$\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$$

□

練習問題３や定理４の内容は高校数学でも扱われる内容ではあるが、一方で極限の計算に多少の論理の飛躍が見られることがしばしばである。たとえば、定理４においても証明内の不等式 $(1+1/(n+1))^n<(1+x)^{1/x}\le(1+1/n)^{n+1}$ において「 $x\to\infty$ にするので $n\to\infty$ 」とはさみうちの原理を使い証明する文献が多い。そうした意味で直観に訴える証明になっているわけだが、一回は律儀に論理記号で証明しておく必要があるのではないだろうか。（そうした試みの連続が筆者の本書を書いている意図である。）ところで話を元に戻すと

$$\lim_{h\to 0}(e^h-1)/h=1$$

を証明することが本来の本節の目的であった。一方で、定義１のままではどうしても e^h を計算することは難しい。そこで e^h について計算できるようにネイピア数を別表示できないかと考える。このとき、少々天下り的ではあるが定理５のような表示であれば解決できることがわかる。（後に無限級数によって指数関数を定義したときは、下記定理は定義から明らかに導かれる事実であり、さらにその性質を Cauchy の積級数に関する事実を用いて証明する。）「意味を拡張した」前節の手法を参考に $e^x\,(x\in\mathbb{R})$ についていきなり考えるのではなく $e^x\,(x\in\mathbb{Q})$ についてまず考えることにする。

定理５（ネイピア数の別表示）
以下の３式がそれぞれ成立。 ただし、$0! = 1, 0^0 = 1$ と定めることにする。
（１） $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$
（２） $\forall n \geq 1, e^n = \sum_{k=0}^{\infty} n^k/k!$
（３） $\forall m \in \mathbb{Z}, e^m = \sum_{k=0}^{\infty} m^k/k!$
（４） $\forall r \in \mathbb{Q}, e^r = \sum_{k=0}^{\infty} r^k/k!$

（証明）
（１） ネイピア数 e を定義１のように定めたから

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$$

を証明すればよい。まず、二項定理を用いると、$\forall n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}\big(1+(1/n)\big)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1/n)^k = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}(1/n)+\binom{n}{2}(1/n)^2+\cdots+\binom{n}{n}(1/n)^n \\ &= 1+1+(1/n)^2\,n(n-1)/(2!)+\cdots \\ &+ (1/n)^n\,n(n-1)(n-2)\ldots 1/(n!) \leq \sum_{k=0}^{n} 1/k! \leq \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!\end{aligned}$$

以上の不等式が $\forall n \geq 1$ で成立しており、特に <u>**$n \to \infty$ としても不等号は変わらない**</u>から、

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n \leq \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$$

が成立。逆方向の不等号は以下のように証明。$\forall m \geq 1$ をとる。さらにこのような m に対し、$m \leq n$ となる n を任意にとる。再び二項定理より

$$\begin{aligned}\big(1+(1/n)\big)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1/n)^k = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}(1/n)+\binom{n}{2}(1/n)^2+\cdots+\binom{n}{n}(1/n)^n \\ &\geq \binom{n}{0}+\binom{n}{1}(1/n)+\binom{n}{2}(1/n)^2+\cdots+\binom{n}{m}(1/n)^m \\ &= 1+1+(1/n)^2\,n(n-1)/(2!)+\cdots \\ &+ (1/n)^m\,n(n-1)(n-2)\ldots\big(n-(m-1)\big)/(m!) \\ &= 1+1+1\big(1-(1/n)\big)/(2!)+\cdots \\ &+ 1\big(1-(1/n)\big)\big(1-(2/n)\big)\ldots\big(1-((m-1)/n)\big)/(m!)\end{aligned}$$

特に <u>**$n \to \infty$ としても不等号は変わらない**</u>から、

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n \geq \sum_{k=0}^{m} 1/k!$$

さらに <u>**$m \to \infty$ としても不等号は変わらない**</u>から、

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n \geq \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$$

以上から、それぞれの不等式を証明できたので

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\sum_{k=0}^{\infty}1/k!$$

（２） 帰納法で証明する。 $n=1$ のときは（１）によりOK。 $n=l\ (l\geq 1)$ において

$$e^l=\sum_{k=0}^{\infty}l^k/k!$$

が成立するとする。このとき、右辺や $\sum_{k=0}^{\infty}1/k!$ がそれぞれ絶対収束するので Cauchy の積級数に関する事実を用いて

$$e^{l+1}=e^le=\left(\sum_{k=0}^{\infty}l^k/k!\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}1/k!\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{i=k}\Big(\big(l^i/i!\big)\big(1/(k-i)!\big)\Big)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{i=k}l^i(k!/(i!\,(k-i)!))(1/k!)=\sum_{k=0}^{\infty}\left((1/k!)\sum_{i=0}^{i=k}\binom{k}{i}l^i\right)=\sum_{k=0}^{\infty}((l+1)^k/k!)$$

が成立。上記式変形の最後は二項定理を用いている。以上から $n=l+1$ での成立もいえ、数学的帰納法により証明したい式は $\forall n\geq 1$ で成立。

（３） $m>0$ に関しては（２）で既に証明している。$m=0$ のときは、$0!=1, 0^0=1$ と定めたことに注意すれば、無限級数の方は 1。一方で、指数関数の定め方により、$e^0=1$ であり、この場合もOK。$m<0$ のときは $-m>0$ であるから $-m$ に関しては（２）が適用でき

$$e^{-m}=\sum_{k=0}^{\infty}(-m)^k/k!$$

一方で $\sum_{k=0}^{\infty}m^k/k!$ は絶対収束しており、Cauchy の積級数に関する事実を用いれば

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}m^k/k!\right)e^{-m}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}m^k/k!\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-m)^k/k!\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\Big(\big(m^i/i!\big)\big((-m)^{k-i}/(k-i)!\big)\Big)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{i=k}m^i(-m)^{k-i}(k!/(i!\,(k-i)!))(1/k!)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left((m^k/k!)\sum_{i=0}^{i=k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left((m^k/k!)\sum_{i=0}^{i=k}\binom{k}{k-i}(-1)^{k-i}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + (-1)\right)^k (m^k/k!) = 0/0! = 1$$

が成立。さらに指数法則より $e^m e^{-m} = e^0 = 1$ が成立しているので

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} m^k/k!\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} m^k/k!\right)(e^m e^{-m}) = \left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} m^k/k!\right) e^{-m}\right) e^m = e^m$$

が成立。よって、証明したい式は $\forall m \in \mathbb{Z}$ において成立。

（４） まず $r > 0$ に関して示す。$r = m/n\ (m \geq 1, n \geq 1)$ とできる。帰納法により $\forall l \geq 1$ に対し

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (1/n)^k/k!\right)^l = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (l/n)^k/k!\right)$$

が成立。（証明は（２）と同様。Cauchy の積級数に関する事実を用いる。）すると、

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (1/n)^k/k!\right)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!\right) = e$$

となるが、各項が正の級数であるから $\sum_{k=0}^{\infty} (1/n)^k/k! > 0$ であって指数の定義では

$$x^n = e$$

となる正の x が $e^{1/n}$ であり、そのようなものは唯一であったから

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1/n)^k/k! = e^{1/n}$$

がいえる。すると

$$e^r = e^{m/n} = \left(e^{1/n}\right)^m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1/n)^k/k!\right)^m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (m/n)^k/k!\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k/k!\right)$$

がいえる。さらに $r < 0$ の場合に関しては（３）の証明の後半と同様に証明。

□

（★）（１）における $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ の収束について

数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を

$$a_k = 1/k!$$

と定めれば $|a_{k+1}/a_k| = |1/(k+1)| \to 0\ (k \to \infty)$ であるから $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ は絶対収束、特に収束。

（★）（１）の証明における傍線部について

「収束する数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\forall n \in \mathbb{N}$ において $a_n \leq b_n$ が成立しているならば

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

が成立する」ことを使っている。これは背理法で以下の様に示せる。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$$

として $\alpha > \beta$ とすると

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |a_n - \alpha| < (\alpha - \beta)/2)$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow |b_n - \beta| < (\alpha - \beta)/2)$$

さて、$N = \max\{N_1, N_2\}$とすれば

$$-(\alpha - \beta)/2 < a_N - \alpha$$
$$b_N - \beta < (\alpha - \beta)/2$$

が成立していて特に

$$a_N > -(\alpha - \beta)/2 + \alpha$$
$$-b_N > -(\alpha - \beta)/2 - \beta$$

がいえるので

$$a_N - b_N > (\alpha - (\alpha - \beta)/2) + (-\beta - (\alpha - \beta)/2) = (\alpha - \beta)/2 > 0$$

となり $\forall n \in \mathbb{N}$ において $a_n \leq b_n$ が成立することに矛盾。よって $\alpha \leq \beta$。

（★）Cauchy の積級数に関する事実

上記証明内における Cauchy の積級数に関する事実とは

「２つの**複素数**の級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ が絶対収束しているとき $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$ とすれば、

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

が成立する。」という事実を指している。また、「絶対収束」は「収束」に条件を緩めることができる。左辺の無限級数の積を「Cauchy の積級数」と表現しているが、正確には「無限級数の Cauchy 積」というようである。似たものに畳みかけ積分がある。

練習問題６

（１） 定理５証明内で前提としている **「$\forall \boldsymbol{r} \in \mathbb{Q}, \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\infty} \boldsymbol{r^k/k!}$ が絶対収束する」** を証明せよ。

（２） **「$\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}, \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\infty} \boldsymbol{z^k/k!}$ が絶対収束する」**ことを証明し、次式の成立を証明せよ。

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} w^k/k!\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (z+w)^k/k!$$

（解答）

（１） $a_k = r^k/k!$ とすれば $|a_{k+1}/a_k| = |r/(k+1)| \to 0 \ (k \to \infty)$ であり $\sum_{k=0}^{\infty} r^k/k!$ は絶対収束、特に収束。

（２） $a_k = z^k/k!$ とすれば $|a_{k+1}/a_k| = |z/(k+1)| \to 0 \ (k \to \infty)$ であり $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ は絶対収束、特に収束。Cauchy の積級数の関する事実を用いて

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} w^k/k!\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}(z^l/l!)(w^{k-l}/(k-l)!)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} z^l w^{k-l}(1/(l!\,(k-l)!))$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} z^l w^{k-l}(k!/(l!\,(k-l)!))\,(1/k!) = \sum_{k=0}^{\infty}(1/k!)\left(\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l} z^l w^{k-l}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(1/k!)\,(z+w)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(z+w)^k/k!$$

□

定理５により本来の目的であった定理７（３）が証明できる。この証明においても定理４を証明したときと同様に、いきなり $(e^h-1)/h$ という関数の極限を考えるのではなく、それを数列の極限に帰着させて証明する。本来は（１）と（２）を証明すれば $(e^h-1)/h$ が $h \neq 0$ で連続であることから前節の定理 23 直下の（★）に注意することで（３）の成立を示せるが、練習のため $\varepsilon\delta$論法を用いて証明する。

定理７（ネイピア数と指数関数の微分を結びつける事実）
以下のそれぞれが成立する。

（１） $\lim_{n\to\infty} n\left(e^{1/n}-1\right) = 1$

（２） $\lim_{n\to-\infty} -n\left(e^{-1/n}-1\right) = 1$

（３） $\lim_{h\to 0}(e^h-1)/h = 1$

（証明）

（１） $\sum_{k=0}^{\infty}(1/n)^k/k!$ は絶対収束していて項の順序は入れ替えても無限級数の値は不変である。定理５の（４）を用いれば

$$n\left(e^{1/n}-1\right) = n\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}(1/n)^k/k!\right)-1\right) = n\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1/n)^k/k!\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(1/n)^{k-1}/k!$$
$$= 1 + O(1/n)$$

であるので

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{1/n}-1\right) = 1$$

（２） $\sum_{k=0}^{\infty}(-1/n)^k/k!$ は絶対収束していて項の順序は入れ替えても無限級数の値は不変である。

定理５の（４）を用いれば

$$-n\left(e^{-1/n}-1\right)=-n\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1/n)^k/k!\right)-1\right)=-n\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1/n)^k/k!\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1/n)^{k-1}/k!=1+O(1/n)$$

であるので

$$\lim_{n\to\infty}-n\left(e^{-1/n}-1\right)=1$$

（３） $|h|<1$ で考える。（ $h\to 0$ で考えているので、$|h|\geq 1$ で考える必要はない。詳細は $\varepsilon\delta$論法で考えるとわかる。小さな δ をとればよく $|\delta|<1$ という条件を最初からつけていても特に問題はないのである。） $|h|<1$ であるから、$|1/h|=1/|h|>1$ である。

（$h>0$ のとき）

$n=[1/h]\ (\geq 1)$ とすれば、 $n\leq 1/h\leq n+1$ であり、 $1/(n+1)\leq h\leq 1/n$ となるが、指数関数の単調性より

$$(1<)\ e^{1/(n+1)}\leq e^h\leq e^{1/n}$$

がわかる。さらに

$$n\left(e^{1/(n+1)}-1\right)\leq (e^h-1)/h\leq (n+1)\left(e^{1/n}-1\right)$$

が成立。ところで、先の（１）を用いれば

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(e^{1/n}-1\right)=\lim_{n\to\infty}((n+1)/n)n\left(e^{1/n}-1\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(e^{1/n+1}-1\right)=\lim_{n\to\infty}(n/(n+1))(n+1)\left(e^{1/(n+1)}-1\right)=1$$

がそれぞれ成立。さて、$\forall\varepsilon\ (>0)$ をとる。直前の式を論理記号で書けば

$$\exists N_1\geq 1,(n\geq N_1\Rightarrow\ \left|(n+1)\left(e^{1/n}-1\right)-1\right|<\varepsilon$$

$$\exists N_2\geq 1,(n\geq N_2\Rightarrow\ \left|n\left(e^{1/n+1}-1\right)-1\right|<\varepsilon$$

となり $N=\max\{N_1,N_2\}$ とすれば $n\geq N$ ならば

$$(n+1)\left(e^{1/n}-1\right)-1<\varepsilon$$

$$-\varepsilon<n\left(e^{1/n+1}-1\right)-1$$

が成立。さて、$\delta\ (>0)$ を $\delta<1/N$ となるようにとることができ（アルキメデスの原理がそれを保証している） $0<h<\delta\ (<1/N)$ とすれば $[1/h]=n>N$ であるので

$$-\varepsilon<n\left(e^{1/(n+1)}-1\right)-1\leq (e^h-1)/h-1\leq n\left(e^{1/n+1}-1\right)-1<\varepsilon$$

となる。したがって $\left|(e^h-1)/h-1\right|<\varepsilon$ となるから

$$\lim_{h\to+0}(e^h-1)/h=1$$

（$h<0$ のとき）

$m=[1/h]\ (\leq -2)$ とすれば $m\leq 1/h\leq m+1\leq -1,1/(m+1)\leq h\leq 1/m$ となるが、指数関数の単調性より

$$(0<)\ e^{1/(m+1)}\leq e^h\leq e^{1/m}\ (<1)$$

$$e^{1/(m+1)}-1 \le e^h-1 \le e^{1/m}-1\ (<0)$$
$$(0<)-\left(e^{1/m}-1\right) \le -(e^h-1) \le -\left(e^{1/(m+1)}-1\right)$$

が順次わかる。さらに $(0<)-(m+1) \le -1/h \le -m$ であるから

$$(m+1)\left(e^{1/m}-1\right) \le (e^h-1)/h \le m\left(e^{1/(m+1)}-1\right)$$

が成立。ところで $h>0$ のときと同様に先の（２）を用いれば

$$\lim_{m\to-\infty}(m+1)\left(e^{1/m}-1\right)=1$$
$$\lim_{m\to-\infty} m\left(e^{1/(m+1)}-1\right)=1$$

がそれぞれ成立。さて、$\forall\varepsilon\ (>0)$ をとる。直前の式を論理記号で書けば

$$\exists N_1 \ge 1, (m \le -N_1 \Rightarrow \left|(m+1)\left(e^{1/m}-1\right)-1\right| < \varepsilon$$
$$\exists N_2 \ge 1, (m \le -N_2 \Rightarrow \left|m\left(e^{1/(m+1)}-1\right)-1\right| < \varepsilon$$

となり $N=\max\{N_1,N_2\}$ とすれば $m \le -N$ ならば

$$m\left(e^{1/(m+1)}-1\right)-1<\varepsilon$$
$$-\varepsilon<(m+1)\left(e^{1/m}-1\right)-1$$

が成立。さて、$\delta\ (>0)$ を $\delta<1/N$ となるようにとることができて（アルキメデスの原理がそれを保証している）$(-1/N<)\ -\delta<h<0$ とすれば $m=[1/h]<-1/\delta<-N$ であるから

$$-\varepsilon<(m+1)\left(e^{1/m}-1\right)-1 \le (e^h-1)/h-1 \le m\left(e^{1/(m+1)}-1\right)-1<\varepsilon$$

となる。つまり $\left|(e^h-1)/h-1\right|<\varepsilon$ となるから

$$\lim_{h\to-0}(e^h-1)/h=1$$

h が正負それぞれのときを合わせて

$$\lim_{h\to0}(e^h-1)/h=1$$

□

（★）片側極限

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a-0}f(x)=b$$

であるとき、$\lim_{x\to a}f(x)=b$ が成立する。この事実は $\varepsilon\delta$論法により解決する。

ネイピア数を底とする指数関数は微分すると再度同じ関数が表れる。さらに注意すべきは（２）で示すようにこのような関数は定数の違いを除けば一意にこの関数に定まるということである。ところで、他にも「ある性質によってその関数が一意に定まる」ということはあるが、これは非常に面白い。（性質を挙げるだけで、全ての x に対応させる値が定まるということだからなかなか強烈なのである！）また、この性質は微分方程式を解くときの基本原理でもある。様々な微分方程式の解法は最終的には指数関数が微分しても指数関数になるという性質に帰着される。（ネイピア数が底の指数関数を特に「指数関数」と呼ぶことが多い。これはセブンイレブンを「コンビニ」と呼ぶようなものだが、そう思えば何だか自然な用法な気がするし、気に入らないという人もいるかもしれない。これは実用性から見た言葉の限界なのである。もどかしい気持ちもあるがやむを得ない。）

定理８（一つのゴール、指数関数の特徴づけ）
指数関数について以下が成立。
（１） $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$
（２） $\mathbb{R}$ で一階微分可能な関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $(f)' = f,\ f(0) = 1$ を満たすとき、

$$f(x) = e^x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

（証明）
（１） 指数法則より

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}(e^{x+h} - e^x)/h = \lim_{h\to 0} e^x (e^h - 1)/h$$

$(e^h - 1)/h \to 1\ (h \to 0)$ であることを定理７で確認したから

$$(e^x)' = e^x \lim_{h\to 0}(e^h - 1)/h = e^x$$

（２） （１）より、e^x は $\mathbb{R}$ で一階微分可能であり $-x$ も $\mathbb{R}$ で１階微分可能であるから合成関数の e^{-x} は微分可能。１階微分可能な関数 f との積も微分可能であり $f(x)e^{-x}$ も $\mathbb{R}$ で１階微分可能となる。積の微分公式を用いれば、

$$(f(x)e^{-x})' = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = 0$$

となるので $f(x)e^{-x}$ は $\mathbb{R}$ 上の定数関数。よって、

$$f(x)e^{-x} = f(0)e^{-0} = 1\ (\forall x \in \mathbb{R})$$

以上より

$$f(x) = e^x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

□

節末問題

1

ネイピア数 e は無理数であることを証明せよ。
（hint:定理５（１）での事実を使う。）

（解答）
まず以下の不等式の成立を示す。

$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n} 1/k! < e \leq \sum_{k=0}^{n} 1/k! + 1/(n!\,n)$$

実際 $e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k! > \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ （各項が正であるので、等号は入らない。その事実を改めて後で使うので注意しておく。）であるから、左辺は明らか。右辺は $m \geq n$ に対し

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m} 1/k! = \sum_{k=0}^{n} 1/k! + \sum_{k=n+1}^{m} 1/k! &\leq \sum_{k=0}^{n} 1/k! + (1/(n+1)!) \sum_{k=0}^{m-n-1} 1/(n+1)^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} 1/k! + (1/(n+1)!) \sum_{k=0}^{\infty} 1/(n+1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} 1/k! + (1/(n+1)!)((n+1)/n) = \sum_{k=0}^{n} 1/k! + 1/(n!\,n)\end{aligned}$$

であり両辺で $m \to \infty$ とすることで成立していることがわかる。さて e は無理数でない（つまり有理数である）と仮定すれば

$$e = p/q \ \ (p \in \mathbb{Z}, q \geq 1)$$

となる p, q が存在。ところが、先の不等式より

$$\sum_{k=0}^{q} 1/k! < e \leq \sum_{k=0}^{q} 1/k! + 1/(q!\,q)$$

であって、

$$(q!) \sum_{k=0}^{q} 1/k! < (q!)e \leq (q!) \left(\sum_{k=0}^{q} 1/k! + 1/(q!\,q) \right)$$

ところで $(q!) \sum_{k=0}^{q} 1/k! \in \mathbb{Z}$ は明らかで $(q!)\left(\sum_{k=0}^{q} 1/k! + 1/(q!\,q)\right) = (q!) \sum_{k=0}^{q} 1/k! + 1/q < (q!) \sum_{k=0}^{q} 1/k! + 1$ であって $(q!)\left(\sum_{k=0}^{q} 1/k! + 1/(q!\,q)\right)$ は整数ではなく、さらにこの数の整数部分は $(q!) \sum_{k=0}^{q} 1/k!$ となる。上記不等式を用いると $(q!)e$ も整数部分が $(q!) \sum_{k=0}^{q} 1/k!$ である数となる一方 $(q!) \sum_{k=0}^{q} 1/k!$ とは異なる数である。これは $(q!)e = (q-1)!\,p$ が整数であることに矛盾。

□

$\boxed{2}$

以下の事実を証明せよ。

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$$

（hint:指数の定義を拡張していった方法を参考にせよ。）

（解答）

前節の補題 14 から x に収束する有理数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がとれる。ここで $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ は $\mathbb{R}$上で一様収束しており、各項は $\mathbb{R}$ 上連続であるから級数も $\mathbb{R}$ 上連続であり

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k! = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} {x_n}^k/k!$$

が成立。ところで、定義 16 より

$$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{(x_n)}$$

ところで、示す命題は $\forall x \in \mathbb{Q}$ においては既に定理５（４）で証明してあるから

$$e^x = \lim_{n\to\infty} e^{(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} {x_n}^k/k! = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$$

□

$\boxed{3}$

$a, b \in \mathbb{R}$ とする。1 階微分可能な関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $(f)' = af,\ f(0) = b$ を満たすとき、

$$f(x) = be^{ax} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

であることを証明せよ。

（hint:定理８の証明を参考にせよ。）

（解答）

e^x は $\mathbb{R}$ で 1 階微分可能であり $-ax$ も $\mathbb{R}$ で 1 階微分可能であり合成関数の e^{-ax} は微分可能である。1 階微分可能な関数 f との積も微分可能であるから $f(x)e^{-ax}$ も $\mathbb{R}$ で 1 階微分可能であって積の微分公式を用いれば

$$(f(x)e^{-ax})' = e^{-ax}(f'(x) - af(x)) = 0$$

となり $f(x)e^{-ax}$ は $\mathbb{R}$ 上の定数関数。よって $f(x)e^{-ax} = f(0)e^{-0} = b\ (\forall x \in \mathbb{R})$ であり

$$f(x) = be^{-ax}$$

□

4

１階微分可能な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が

$$\begin{cases} (f)'=g \\ (g)'=f \\ f(0)=1, g(0)=0 \end{cases}$$

を満たすとき $f(x),\ g(x)$ の具体的な関数の表示を求めよ。

（解答）

$e^x, -x$ は共に $\mathbb{R}$ で１階微分可能であるから合成関数の e^{-x} は１階微分可能。１階微分可能な関数 $f+g, f-g$ との積も１階微分可能であるので $(f(x)+g(x))e^{-x}, (f(x)-g(x))e^x$ も $\mathbb{R}$ で１階微分可能となるから積の微分公式を用いて

$$\left((f+g)(x)e^{-x}\right)' = e^{-x}\left((f+g)'(x)-(f+g)(x)\right)=0$$

$$\left((f-g)(x)e^{x}\right)' = e^{x}\left((f-g)'(x)+(f-g)(x)\right)=0$$

となるので $(f+g)(x)e^{-x}, (f-g)(x)e^x$ は $\mathbb{R}$ 上の定数関数。よって

$$(f+g)(x)e^{-x}=(f+g)(0)e^{-0}=1\ \ (\forall x\in\mathbb{R})$$

$$(f-g)(x)e^{x}=(f-g)(0)e^{0}=1\ \ (\forall x\in\mathbb{R})$$

以上より

$$(f+g)(x)=e^x, (f-g)(x)=e^{-x}\quad (\forall x\in\mathbb{R})$$

がわかる。したがって

$$f(x)=(e^x+e^{-x})/2, g(x)=(e^x-e^{-x})/2$$

□