０－３対数函数

本節では、対数関数に関する事実を整理している。本章の１節で確認したように指数関数は狭義単調な関数である。関数の定義域を工夫し、さらに行先の集合を値域のみに限定すれば全単射な関数となり、逆関数が存在する。こうしてできた関数が対数函数である。また、底をネイピア数の指数関数の逆関数は微分すると $1/x$ になるという性質があり頻繁に使用される。ところで演算に関しては指数関数の逆関数として対数函数を定めるので、指数法則に対応した対数に関する諸公式が導かれる。以上は a^x の「肩の数」 x について述べたのが対数であることが理解できていれば想像に難くない。纏めると、本節では対数函数が指数関数と対をなす概念であり、さらにその中で底がネイピア数のものは微分すると $1/x$ になるという性質をもっていることが学べる。

前節と同様の点（意味の拡張）に注意して読まれるとよいだろう。

一方で数学的な観点としては以下の点について学習できる。
・対数函数と指数関数の関係
・対数函数の性質を証明する際に指数関数の諸性質に帰着させる手法
・関数の極限を数列の極限に帰着させる手法
・対数関数と微分の関係

以上に留意し、取り組んでほしい。

さて、指数関数が狭義単調であることを用いて全単射になるよう定義域と値域を工夫して全単射になるようにする。こうして逆関数が存在する関数にする。

定理１（指数関数は全単射）
$a \in \mathbb{R}+ \setminus \{1\}$ とする。
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}+$ を $f(x) = a^x$ となるように定める。
このとき f は全単射。

（証明）
（単射であること）
$f(x) = f(y)$ とすると $a^x = a^y$ であるが、本章１節の節末問題２の結果を用いることにより

$$a^x = a^y \Rightarrow a^x a^{-y} = a^y a^{-y} \Rightarrow a^{x-y} = 1 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

となるので f は単射。
（全射であること）
$a > 1$ である場合を示す。まず $\mathbb{R}+ \ni \forall y$ をとる。

このとき $a>1$ であるから f は狭義単調増加かつ連続な関数でさらに

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

が成立している。以上を用いると $y>0$ に注意すれば

$$\exists M_1>0, x>M_1 \Rightarrow f(x)>y$$
$$\exists M_2>0, x<M_2 \Rightarrow f(x)<y$$

第２式は f が正の値しかとらないから成立している。以上より

$$f(M_2/2)<y<f(2M_1)$$

が成立している。閉区間 $[M_2/2\,, 2M_1]$ に中間値の定理を用いて

$$\exists c \in (M_2/2\,, 2M_1), f(c)=y$$

となる。以上より $f(c)=y$ となる $c\ (>0)$ の存在がいえるので f は全射。$a<1$ である場合は上記証明と比較したとき f は狭義単調減少かつ連続な関数でさらに

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

となるので同様に証明できる。

□

（★）$a>1$ である場合の次式（上記証明で使った。）に関しては節末問題で示す。

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

以上で指数関数が全単射であることが確認できたので、指数関数には逆関数が存在することがわかる。この逆関数こそが対数函数である。

定義２（対数および対数函数の定義）
$a\in\mathbb{R}+\diagdown\{1\}$ とする。定理１で $f(x)=a^x$ は全単射であることを確かめた。
然らば $f(x)=a^x$ には逆関数 $g\colon\mathbb{R}+\to\mathbb{R}$ が存在し、この関数を a を底とする対数函数という。
特に $b\in\mathbb{R}+$ に対し $g(b)$ の値を $\log_a b$ で表し、これを a を底としたときの真数 b の対数という。
また、ネイピア数 e を底とする対数を自然対数という。

※慣習的に自然対数は底については表記しない。つまり $\log b$ とかけば $\log_e b$ をあらわしている。

定義２において $b\in\mathbb{R}+$ に対し $g(b)$ の値を $\log_a b$ で表したから

$$a^{\log_a b}=a^{g(b)}=f(g(b))=b$$

がわかる。さらに a^x は全単射であるから $a^x=b$ となる x は $\log_a b$ のみ。以上から

$$a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$$

が成立する。

以上の事実は以後も頻繁に使う上に対数をイメージするときにも有効である。たとえば $\log_a b$ であれば $a^x = b$ をみたす x であるから「対数 $\log_a b$ は『正の数 b は a の何乗か』を表した数」と解しておけばよい。たとえば $\log_3 81$ であれば『正の数 81 は 3 の何乗か』を表す数であるから $\log_3 81 = 4$ が直ちに分かる。

さて、定義２から明らかに定理３が導かれる。これらの諸公式は指数法則の成立を対数の表記で言い換えたものであるので証明には指数法則を使う。定理３の（１）や（２）に加え、（４）は底を変換するときに有用な公式である。この公式によって対数関数について考察する際は対象を底がネイピア数の対数関数に絞ればよい。それ以外はネイピア数の対数函数の定数倍で表現できるからである。

定理３（指数法則に対応する対数の性質）

$a, b, c \in \mathbb{R}+ \diagdown \{1\}$ かつ $X, Y \in \mathbb{R}+$ とする。

（１） $\log_a X + \log_a Y = \log_a XY$

（２） $s \in \mathbb{R}$ とすると $\log_a X^s = s\log_a X$

（３） $(\log_a b)(\log_b c) = \log_a c$

（４） $\log_b c = (\log_a c)/(\log_a b)$

（証明）

（１） $x = \log_a X, y = \log_a Y$ とすれば、定義２より $X = a^x, Y = a^y$ となる。ここで指数法則より

$$XY = a^x a^y = a^{x+y}$$

であるので $\log_a XY = x + y = \log_a X + \log_a Y$

（２） $x = \log_a X$ とすれば、定義２より $X = a^x$ となる。ここで指数法則より

$$X^s = (a^x)^s = a^{xs}$$

であるので $\log_a X^s = xs = sx = s\log_a X$

（３） $x = \log_a b, y = \log_b c$ とすれば、定義２より $b = a^x, c = b^y$ となる。ここで指数法則より

$$c = b^y = (a^x)^y = a^{xy}$$

であるので $\log_a c = xy = (\log_a b)(\log_a c)$

（４） 先程の（３）を式変形したもの。

□

定理３の諸公式に限らず、大小関係についても指数関数からの性質を引き継ぐ。対数函数が単調であることは、対数函数の極限を考える時に有用。（本章１節と同様に実数をガウス記号等によって自然数、整数、有理数の大小関係によって挟み、単調性から関数の極限を数列の極限に帰着させる。）証明に指数関数の大小関係を使うことは定理３の証明と全く同様。

定理４（対数函数の狭義単調性）
（１） 関数 $\log x$ は単調増加な関数。つまり $X, Y \in \mathbb{R}+$ とすると $X < Y \Rightarrow \log X < \log Y$。
（２） $a > 1$ とする。関数 $\log_a x$ は狭義単調増加な関数。つまり $X, Y \in \mathbb{R}+$ とすると $X < Y \Rightarrow \log_a X < \log_a Y$。
（３） $0 < a < 1$ とする。関数 $\log_a x$ は狭義単調増減少な関数。つまり $X, Y \in \mathbb{R}+$ とすると $X < Y \Rightarrow \log_a X > \log_a Y$。

（証明）
（１） $x = \log X, y = \log Y$ とすれば定義２より $X = e^x, Y = e^y$ である。ここで $x \geq y$ とすると $e > 1$ に注意して前節の定理 19（２）を用いると

$$X = e^x \geq e^y = Y$$

となって $X < Y$ に矛盾。これは $x \geq y$ としたことによるものだから $x < y$ が成立。

（２） 先程の（１）を用いると $0 = \log 1 < \log a$ である。再び（１）を用いると

$$\log X < \log Y$$

であるが、両辺に $\log a\ (> 0)$ の逆数をかけて定理３（４）に注意すれば

$$\log_a X = (\log X)/(\log a) < (\log Y)/(\log a) = \log_a Y$$

（３） 先程の（１）を用いると $0 = \log 1 > \log a$ である。再び（１）を用いると

$$\log X < \log Y$$

であるが、両辺に $\log a\ (< 0)$ の逆数をかけて定理３（４）に注意すれば

$$\log_a X = (\log X)/(\log a) > (\log Y)/(\log a) = \log_a Y$$

□

（★）$\log 1 = 0$ は本章 1 節の節末問題２の結果より明らかである。

定理４で対数函数の単調性を確かめた。この単調性から関数の極限を数列の極限に帰着させ、対数函数が連続であることを示す。連続であることは各点で連続であることを証明すればよい。さらに指数関数は底の変換公式（定理３（４））を用いてネイピア数が底の指数関数の定数倍である。したがって、底がネイピア数の指数関数を主に検証すればよい。下記の証明では極限をとるときに変数の変換を行っていない。本章ではそのようなことを証明していないし、その背景にある事実を書き下すことで極限の変数変換による作業がどのようなものかを具体的に表現したかった。簡単に表現することで本来の理解が失われる可能性があることを認識しておく必要がある。

定理５（対数函数の連続性）
$a \in \mathbb{R}+ \setminus \{1\}$ とする。

（１） $\lim_{x \to 1} \log x = 0$

（２） $\lim_{x \to 1} \log_a x = 0$

（３） $\lim_{x \to p} \log_a (x/p) = 0 \ (p \in \mathbb{R}+)$

（４） $g: \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ を $g(x) = \log_a x$ のように定めると、g は連続。

（証明）

（１） $\forall \varepsilon\ (> 0)$ をとる。このとき $e > 1$ であるから e^x は単調増加であり $e^\varepsilon > 1$ となる。ここで $\delta = 1 - e^{-\varepsilon}$ とする。このとき $|x - 1| < \delta$ をみたす任意の x をとる。 $y = \log x$ とすれば定義２より $x = e^y$ となる。このような y に対し $|e^y - 1| < \delta$ であるから

$$e^{-\varepsilon} = 1 - \delta < e^y < 1 + \delta = 2 - e^{-\varepsilon}$$

が成立している。さらに相加相乗の大小関係と $\varepsilon \neq 0$ で等号成立する場合はないことから

$$e^\varepsilon - (2 - e^{-\varepsilon}) > 2\sqrt{e^\varepsilon e^{-\varepsilon}} - 2 = 0$$

となり $(2 - e^{-\varepsilon}) < e^\varepsilon$ となるから先程の不等式と合わせて

$$e^{-\varepsilon} = 1 - \delta < e^y < 1 + \delta < e^\varepsilon$$

であって $e > 1$ であるから

$$-\varepsilon < y < \varepsilon$$

$y = \log x$ であるので

$$-\varepsilon < \log x < \varepsilon$$

が成立する。

（２） 定理３（３）と上記で証明した（１）を用いれば

$$\lim_{x \to 1} \log_a x = \lim_{x \to 1} (\log_a e)(\log_e x) = (\log_a e) \lim_{x \to 1} \log x = 0$$

（３） $\forall \varepsilon\ (> 0)$ をとる。先程の（２）より

$$\exists \delta > 0, |t - 1| < \delta \Rightarrow \ |\log_a t| < \varepsilon$$

となる。ここで $x_n \to p\ (n \to \infty)$ となる数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を任意にとると

$$\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \ |x_n - p| < |p|\delta$$

このような N に対して $n \geq N$ ならば $|(x_n/p) - 1| = |x_n - p|/|p| < \delta$ であるから

$$|\log_a (x_n/p)| < \varepsilon$$

が成立する。したがって $\lim_{n \to \infty} \log_a (x_n/p) = 0$ となるが、数列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は任意にとったから

$$\lim_{x\to p}\log_a(x/p)=0$$

（４） $\mathbb{R}+\ni\forall p$ とる。 $x=p$ で g が連続であることを示せばよい。ところで定理３より

$$|g(x)-g(p)|=|\log_a x-\log_a p|=|\log_a(x/p)|$$

ところで $\forall\varepsilon\ (>0)$ をとる。先の（３）の結果を用いると

$$\exists\delta\ (>0),|x-p|<\delta\Rightarrow\ |\log_a(x/p)|<\varepsilon$$

であってこのような δ に対して $|x-p|<\delta$ であれば

$$|g(x)-g(p)|<\varepsilon$$

が成立する。以上から $\lim_{x\to p}g(x)=g(p)$ となるので $x=p$ で g が連続。

□

対数函数が連続であることは確かめた。次に微分が可能な関数かどうかを確かめる。そのために天下り的ではあるが、定理６を示す。これは対数函数の微分係数を求めるときに式に表れる極限である。（気になる読者は先に定理７を読んでもらうとよい。）

定理６（対数と極限の関係）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

が成立。

（証明）

$\forall\varepsilon\ (>0)$ をとる。前節の定理７（３）の逆数をとって $\lim_{h\to 0}h/(e^h-1)=1$ であるから

$$\exists\delta\ (>0),|h|<\delta\Rightarrow\ \left|(h/(e^h-1))-1\right|<\varepsilon$$

が成立。ところでこのような δ に対し $e^{-\delta}<e^0=1$ であるから $1-e^{-\delta}>0$ である。そこで $|x|<1-e^{-\delta}$ となる x を任意にとると $e^{-\delta}-1<x<e^{\delta}-1$ がいえるから $e^{-\delta}<x+1<e^{\delta}$ であり定理４で確認したように $\log x$ は単調増加な関数であるから

$$-\delta=\log e^{-\delta}<\log(x+1)<\log e^{\delta}=\delta$$

となる。つまり $|\log(x+1)|<\delta$ が成立。また定義２より $x=(x+1)-1=e^{\log(x+1)}-1$ であるので先程の論理式を適用できて

$$|(\log(x+1)/x)-1|=\left|\left(\log(x+1)/\left(e^{\log(x+1)}-1\right)\right)-1\right|<\varepsilon$$

の成立がいえるので

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$$

□

（★）「前節の定理７（３）の逆数をとって」の部分における妥当性の検証

$\lim_{x\to\alpha} f(x) = A \neq 0$ であるとき $\lim_{x\to\alpha} 1/f(x) = 1/A$ であることを証明すればよい。

まず $|A|/2 > 0$ であることと $\lim_{x\to\alpha} f(x) = A$ であることから

$$\exists\delta_1\ (>0), |x| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < |A|/2$$

$A > 0$ であれば特に $|x| < \delta_1$ で $f(x) > A - |A|/2 = A/2 > 0$ が成立。$A < 0$ であれば特に $|x| < \delta_1$ で $f(x) < A + |A|/2 = A/2 < 0$ が成立する。いずれの場合も $|x| < \delta_1$ で $|f(x)| > |A|/2$ がわかる。ところで $\forall\varepsilon\ (>0)$ をとる。$\lim_{x\to\alpha} f(x) = A \neq 0$ であることを再び用いて

$$\exists\delta_2\ (>0), |x| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon(|A|^2/2)$$

が成立。ここで $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とする。このとき $|x| < \delta$ であれば

$$|(1/f(x)) - (1/A)| = \left|\left(A - f(x)\right)/(f(x)A)\right| = |f(x) - A|/(|f(x)||A|) < |f(x) - A|(2/|A|^2) < \varepsilon$$

となるので $\lim_{x\to\alpha} 1/f(x) = 1/A$ の成立が分かる。

（★）傍線部の証明

$1 - e^{-\delta} < e^{\delta} - 1$ を証明すればよい。ここで $e^{-\delta}, e^{\delta}$ は共に正の実数であるから相加相乗の大小関係に関する命題が適用できて

$$\left(e^{\delta} - 1\right) - \left(1 - e^{-\delta}\right) = \left(e^{\delta} + e^{-\delta}\right) - 2 \geq 2\sqrt{e^{\delta}e^{-\delta}} - 2 = 0$$

となり等号成立は $e^{\delta} = e^{-\delta} = 1$ のときでこれは $\delta = 0$ のとき。ところが今は $\delta > 0$ であるので

$$\left(e^{\delta} - 1\right) - \left(1 - e^{-\delta}\right) > 0$$

以上より $1 - e^{-\delta} < e^{\delta} - 1$ がいえるから $x < 1 - e^{-\delta} < e^{\delta} - 1$ が成立。

定理７（対数関数の微分）

$\forall x \in \mathbb{R}+, \log x$ は微分可能で

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

（証明）

定理３にある対数に対する諸公式を用いると

$$(\log(x+h) - \log x)/h = (\log((x+h)/x))/h = \left(\log\left(1 + (h/x)\right)\right)/h$$

が成立する。ここで定理６を用いると

$$\lim_{h\to 0}\left(\log\left(1+(h/x)\right)\right)/h = 1/x$$

がわかるので

$$\lim_{h\to 0}(\log(x+h)-\log x)/h = \lim_{h\to 0}\left(\log\left(1+(x/h)\right)\right)/h = 1/x$$

以上より $\log x$ は微分可能で $(\log x)' = 1/x$ が成立。

□

（★）傍線部の証明

$\forall\varepsilon\ (>0)$ をとる。定理６より

$$\exists\delta\ (>0), |h|<\delta \Rightarrow \left|(\log(1+h))/h - 1\right| < x\varepsilon$$

このような δ をとれば $x>0$ に注意して $|h|<x\delta$ であるとき $|h/x|<\delta$ であるので

$$\left|\left(\log\left(1+(h/x)\right)\right)/(h/x) - 1\right| < x\varepsilon$$

両辺を $x\ (>0)$ で割って

$$\left|\left(\log\left(1+(h/x)\right)\right)/h - (1/x)\right| < \varepsilon$$

がわかる。これより傍線部は成り立つ。

微積分学の基本定理により、定理８を証明することができる。ところで、定理８の式によって対数函数を定義する手法もある。その手法では、定理７の式が成立して指数関数との合成関数を考えることで指数関数の逆関数であることがわかる。

定理８ （一つのゴール、対数函数の別表表示）

$x\in\mathbb{R}+$とする。

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

（証明）

定理７と微積分学の基本定理より

$$\left(\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)' = \frac{1}{x} = (\log x)'$$

また微分演算は線形であるので

$$\left(\log x - \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)' = (\log x)' - \left(\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)' = 0$$

が成立する。したがって

$$\log x - \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \log 1 - \int_1^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 0\ \ (\forall x\in\mathbb{R}+)$$

となるので示したい式は証明された。

□

節末問題

1

$\alpha \in \mathbb{R}+$とする。このとき、以下の２式をそれぞれ証明せよ。

（１） $\lim_{x\to\infty}(e^x/x^\alpha) = \infty$

（２） $\lim_{x\to 0}(\log x/x^\alpha) = 0$

（解答）

（１） 前節の節末問題２の結果と二項定理を用いて $x > 0$ であるとき

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}(x^k/k!) > x^{[\alpha]+1}/([\alpha]+1)!$$

がわかる。ここから

$$e^x/x^\alpha > x^{([\alpha]+1)-\alpha}/([\alpha]+1)!$$

ところでガウス記号の性質により $([\alpha]+1) - \alpha > 0$ であるので

$$\lim_{x\to\infty} x^{([\alpha]+1)-\alpha}/([\alpha]+1)! = \infty$$

となる。したがって $\forall M\ (> 0)$ をとると

$$\exists L\ (> 0), x > L \Rightarrow\ x^{([\alpha]+1)-\alpha}/([\alpha]+1)! > M$$

となるが、このような L に対し $x > L$ であれば

$$e^x/x^\alpha > x^{([\alpha]+1)-\alpha}/([\alpha]+1)! > M$$

がわかるので

$$\lim_{x\to\infty}(e^x/x^\alpha) = \infty$$

（２） まず $\alpha = 1$ に対しての成立を示す。（１）より

$$\lim_{x\to\infty}(e^x/x) = \infty$$

であるから $\forall \varepsilon\ (> 0)$ をとると

$$\exists l\ (> 0), t > l \Rightarrow\ e^t/t > 1/\varepsilon$$

ここで $L = e^l$ として $x > L$ とすれば $\log x > \log L = l$ となるから先の論理式より

$$x/\log x > 1/\varepsilon\ \ (> 0)$$

であって逆数をとることで $0 < (\log x)/x < \varepsilon$ がわかる。以上から $\alpha = 1$ に対しては成立。

さらに以上の結果より

$$\lim_{x\to\infty}((\log x^\alpha)/x^\alpha) = 0$$

もわかる。実際 $\alpha = 1$ に対しての成立は先程確認していて、そこから $\forall \varepsilon\ (> 0)$ をとると

$$\exists k\ (>0), t > k \Rightarrow (0 <)\ (\log t)/t < \varepsilon$$

となるが、このような k に対し $x > k^{(1/\alpha)}$ であれば $x^\alpha > k$ がいえるので

$$(0 <)\ (\log x^\alpha)/x^\alpha < \varepsilon$$

となるので結局、当初示したかった

$$\lim_{x\to\infty}((\log x^\alpha)/x^\alpha) = 0$$

が成立する。最後に定理３（２）を用いることで

$$\lim_{x\to\infty}(\log x/x^\alpha) = (1/\alpha)\lim_{x\to\infty}\alpha(\log x/x^\alpha) = (1/\alpha)\lim_{x\to\infty}((\log x^\alpha)/x^\alpha) = 0$$

□

$\boxed{2}$

定理１で使った以下の事実について証明せよ。

$a > 1$ である場合に次式が成立。

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

（解答）

まず数列の極限として以下の式がそれぞれ成立。

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$$

実際、二項定理より $a^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a-1)^k > n(a-1)$ であるが右辺は $n\to\infty$ とすれば ∞ に発散するから左辺も $n\to\infty$ とすれば ∞ に発散。また $a^{-n} = (a^n)^{-1}$ であるので下の式が成立。以上を論理記号で書けば以下の通り。任意に $M\ (>0)$ と $\varepsilon\ (>0)$ をとったとき

$$\exists N_1 > 0, n \geq N_1 \Rightarrow\ a^n > M$$

$$\exists N_2 > 0, n \geq N_2 \Rightarrow\ 0 < a^{-n} < \varepsilon$$

が成立する。ここで a^x は狭義単調増加であることに注意すれば $x > N_1$ であるとき $a^x > a^n > M$ となるから示したい式の上式は成立。一方 $x < -N_2$ であれば $a^x < a^{-n} < \varepsilon$ であるので示したい式の下式も成立。

□

（★）上記の解答で数列の極限に関する以下の事実を用いている。

（１） $a_n \le b_n\ (\forall n \ge 1)$ をみたし $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ であるとき $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ が成立。

（２） $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ であるとき $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$ が成立。

（それぞれの証明）

（１） $\forall M\ (>0)$ をとると $a_n \to \infty\ (n \to \infty)$ であるから

$$\exists N \ge 1, n \ge N \Rightarrow\ a_n > M$$

が成立。このような N をとれば $n \ge N$ であるとき $a_n \le b_n\ (\forall n \ge 1)$ に注意すると $b_n > M$ となるので $b_n \to \infty\ (n \to \infty)$

（２） $\forall \varepsilon\ (>0)$ をとると $a_n \to \infty\ (n \to \infty)$ であるから

$$\exists N \ge 1, n \ge N \Rightarrow\ a_n > 1/\varepsilon\ (>0)$$

が成立。このような N をとれば $n \ge N$ であるとき $1/a_n > \varepsilon$ となるから $a_n \to 0\ (n \to \infty)$

3

e^π と π^e の大小を決めよ。ただし $\pi > 3$ を前提とする。

（解答）

$f: \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ を $f(x) = (\log x)/x$ で定めると $\log x$ と $1/x$ は $\mathbb{R}+$ で連続かつ微分可能であるのでその積である f に関しても $\mathbb{R}+$ で連続かつ微分可能。また定理７の結果を用いれば

$$f'(x) = (1 - \log x)/x^2$$

となる。さて $\log x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$ と $\log x > 1 \Leftrightarrow x > e$ に注意すると f は $0 < x < e$ において狭義単調増加し $x > e$ において狭義単調減少。したがって連続であることに注意すれば f は $x = e$ において最大値をとる。以上から $\pi > 3 > e$ であることに注意して

$$(\log e)/e = f(e) > f(\pi) = (\log \pi)/\pi$$

すると式変形をすることで

$$\log e^\pi = \pi \log e > e \log \pi = \log \pi^e$$

以上よりネイピア数を底とする指数関数は単調増加であることを用いて

$$e^\pi = e^{\log e^\pi} > e^{\log \pi^e} = \pi^e$$

□

4

$\forall k \in \{1,2,\dots,n\}$ に対し $x_k > 0$ であるとする。このとき、以下の不等式を証明せよ。

$$(1/n)\sum_{k=1}^{n} x_n \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_n}$$

（解答）

まず $b > a > 0, t \in [0,1]$ としたとき $\log x$ について以下の不等式の成立がわかる。

$$\log(ta + (1-t)b) \geq t\log a + (1-t)\log b$$

実際に以下のように示せる。まず $b > a > 0$ を任意にとる。さらに $f: \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \log x$ で定める。すると $f'(x) = 1/x > 0$ かつ $f''(x) = -1/x^2 < 0$ がわかる。ところで $a < c < b$ となる c を任意にとる。このとき $(f(c) - f(a))/(c - a) > f'(c) > (f(b) - f(c))/(b - c)$ である。というのも、平均値の定理から

$$\exists x_1 \in (a, c)\,, f'(x_1) = \big(f(c) - f(a)\big)/(c - a)$$
$$\exists x_2 \in (c, b)\,, f'(x_2) = \big(f(b) - f(c)\big)/(b - c)$$

がわかるが $f''(x) < 0$ で $f'(x)$ は単調減少のため

$$\big(f(c) - f(a)\big)/(c - a) = f'(x_1) > f'(c) > f'(x_2) = \big(f(b) - f(c)\big)/(b - c)$$

が成立しているため。さて $\forall t \in (0,1)$ をとる。さらに $c_0 = ta + (1-t)b$ とすると $a < c_0 < b$ が成立する。したがって、先ほどの式が使えて

$$(f(c_0) - f(a))/(c_0 - a) > f'(c_0) > (f(b) - f(c_0))/(b - c_0)$$

特に最右辺と最左辺の関係に注目すると $c_0 = ta + (1-t)b$ であるから

$$(f(c_0) - f(a))/\big((1-t)(b-a)\big) > (f(b) - f(c_0))/(t(b-a))$$

両辺に $t(1-t)(b-a)\ (>0)$ をかけることで

$$t(f(c_0) - f(a)) > (1-t)(f(b) - f(c_0))$$

さらに式変形を進めれば

$$f(c_0) > tf(a) + (1-t)f(b)$$

が成立する。したがって $\log(ta + (1-t)b) \geq t\log a + (1-t)\log b$ が成立。すると帰納法を使うことで任意の $n \geq 1$ において以下が成立。（●）

$$\log\left((1/n)\sum_{k=1}^{n} x_n\right) \geq (1/n)\sum_{k=1}^{n} \log x_k$$

実際 $n = 1$ のときは明らかに成立。また $n = 2$ でも成立。（★）さらに $n = k\ (\geq 2)$ のときに上式が成立したとする。このとき上から２行目の式の成立から

$$\log\left((1/(k+1))\sum_{l=1}^{k+1}x_l\right)=\log\left((k/(k+1))\left((1/k)\sum_{l=1}^{k}x_l\right)+(1/(k+1))x_{k+1}\right)$$

$$\geq (k/(k+1))\log\left((1/k)\sum_{l=1}^{k}x_l\right)+(1/(k+1))\log x_{k+1}$$

$$\geq (k/(k+1))\left((1/k)\sum_{l=1}^{k}\log x_l\right)+(1/(k+1))\log x_{k+1}$$

$$\geq (1/(k+1))\sum_{l=1}^{k+1}\log x_l$$

以上より $n=k+1$ のときでも成立し、（●）の成立が示せた。上式で３つ目の不等式は帰納法の仮定により成立していることに注意。等号成立は２行目の不等式に注意して帰納的に $n=2$ のときの等号成立に帰着できてそこから $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のとき。さらに上式を式変形すると

$$\log\left((1/n)\sum_{k=1}^{n}x_n\right)\geq \log\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_n}\right)$$

が成立。ここで指数関数 e^x は単調増加であるから

$$(1/n)\sum_{k=1}^{n}x_n=e^{\log\left((1/n)\sum_{k=1}^{n}x_n\right)}\geq e^{\log\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_n}\right)}=\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_n}$$

が成立する。

（★）$n=2$ のときの成立に関して

まず $(1/2)\sum_{k=1}^{2}x_n\geq\sqrt[2]{\prod_{k=1}^{2}x_n}$ を示す。ここで $x_1,x_2>0$ であるから本章の１節に注意して $\sqrt[2]{x_1},\sqrt[2]{x_2}$ がそれぞれ存在して、指数法則に注意すれば $(1/2)\sum_{k=1}^{2}x_n-\sqrt[2]{\prod_{k=1}^{2}x_n}=(1/2)(x_1+x_2)-\sqrt[2]{x_1x_2}=(1/2)((\sqrt[2]{x_1})^2+(\sqrt[2]{x_2})^2)-\sqrt[2]{x_1}\sqrt[2]{x_2}=(1/2)((\sqrt[2]{x_1})^2+(\sqrt[2]{x_2})^2-2\sqrt[2]{x_1}\sqrt[2]{x_2})=(1/2)(\sqrt[2]{x_1}-\sqrt[2]{x_2})^2\geq 0$ となるので $(1/2)\sum_{k=1}^{2}x_n\geq\sqrt[2]{\prod_{k=1}^{2}x_n}$ が成立。また等号成立は $\sqrt[2]{x_1}=\sqrt[2]{x_2}$ つまり $x_1=x_2$ のとき。さらに対数函数 $\log x$ は単調増加で

$$\log\left((1/2)\sum_{k=1}^{2}x_n\right)\geq\log\sqrt[2]{\prod_{k=1}^{2}x_n}$$

が成立する。等号成立は同様に $x_1=x_2$ のとき。

（★）定理６（★）の証明で既に $n=2$ のときの成立を使っているが $n=2$ の場合は先程確認したように対数関数を用いずに証明できている。もし、そうでなければ証明内で対数函数を微分しているのでトートロジーになってしまう。