0章のガイダンス：**指数関数ってなんやねんっ！？**

0-1 … 便利な関数、指数関数の構成について

● **指数の概念は「何回かけあわせるのか」から始まる**

そもそも
～乗って？

a^2??　　$a \times a$

～乗は
～回かけること

a^3??　　$a \times a \times a$

⋮　　⋮

一般化すると　　一般化すると

(自然数)乗
は意味が明確

a^n??　　$\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{個}}$

既知の概念

新しく作る概念

(整数)乗
を定めることができる？　　例えば…　a^{-1} ?

(有理数)乗
を定めることができる？　　例えば…　$a^{1/3}$?

(実数)乗
を定めることができる？　　例えば…　a^{π} ?

螺旋のように
互いに関わりながら
概念を拡げていく

それが意味の
拡張の物語っ…！

圧倒的思考っ…！
圧倒的学問っ…！

指数法則をみたす

(自然数)乗	**(整数)乗**	**(有理数)乗**	**(実数)乗**
a^n	a^m	a^r	a^x

・整数のうち自然数は既に定義されている
・0乗は1として定義する
・マイナス上は逆数として定義

・まず、(1/n)乗を定義
・(1/n)乗が定めればそれをm乗したものが(m/n)乗と定義

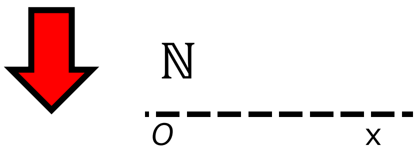
・極限として定義
・xに収束する有理数列で列の有理数に其々指数が定まりその極限として定義

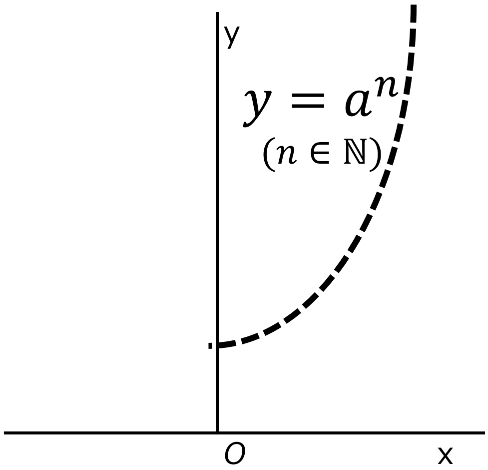
(実数)乗が定まることで指数関数を定義できる！

● 指数の拡張

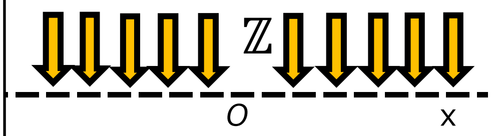
自然数から整数、整数から有理数、有理数から実数への拡張と同じことをする

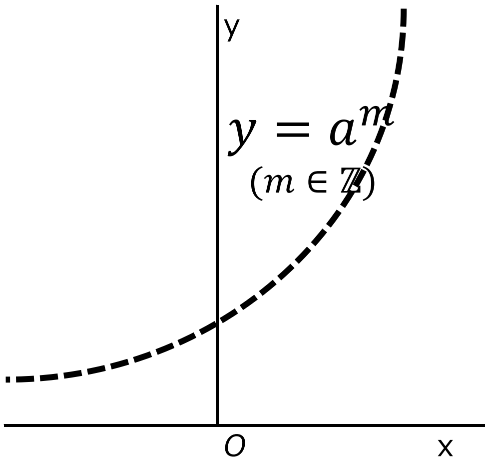
自然数　→　0以上の部分にまだらにある



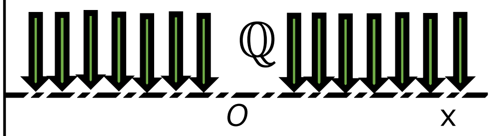


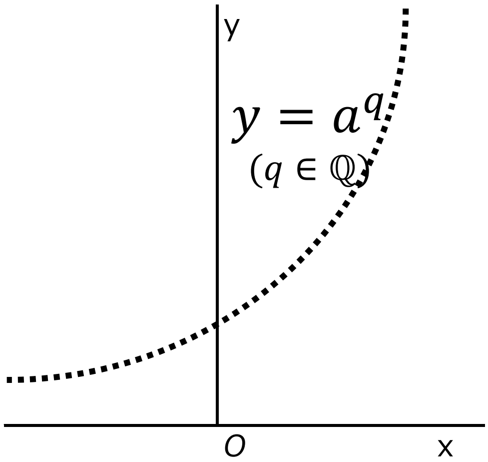
整数　→　0より小さい部分も定義



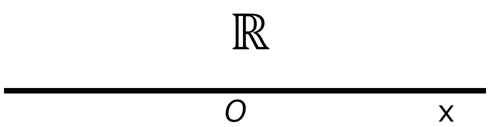


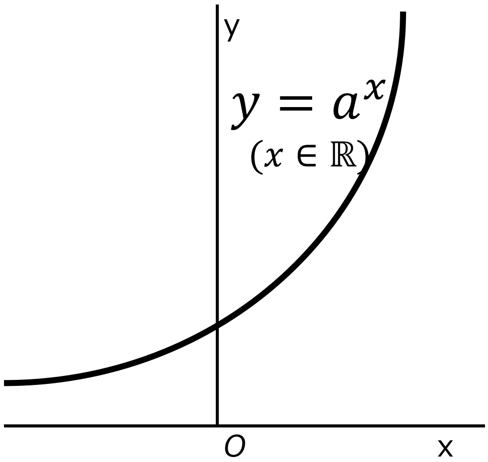
有理数　→　整数の時にあったスキマを少し埋める





実数　→　有理数の時にあったスキマを完全に埋める
（完備化という操作）





● **指数の拡張において引き継がれる性質**
下記等式・不等式が成立することをもって「妥当な」拡張とみなす

◎**指数法則**　以下の２式がどの拡張においても成立。

（１）　$a^x a^y = a^{x+y}$

（２）　$(a^x)^y = a^{xy}$

<指数法則のイメージ>
(1) 指数（肩の数字）は「何回かけ合わせたか」が基本概念で左辺と右辺はaをx+y回かけあわせたもの

$$\underbrace{(aaa \ldots aa)}\underbrace{(aaa \ldots aa)} = \underbrace{aaa \ldots aa}$$

aを**x回**かけあわせたもの（×）aを**y回**かけあわせたもの（=）aを**x+y回**かけあわせたもの

(2) 指数（肩の数字）は「何回かけ合わせたか」が基本概念で左辺と右辺はaをxy回かけあわせたもの

$$\underbrace{(a^x a^x a^x \ldots a^x a^x)} = \underbrace{aaa \ldots aa}$$

$\underbrace{aaa \ldots aa}_{x個}$

a^xを**y回**かけあわせたもの（=）aを**xy回**かけあわせたもの

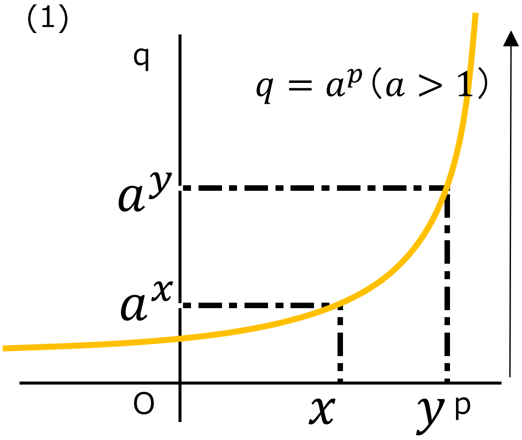
◎狭義単調性　以下の不等式がどの拡張においても成立。

(i)　$a > 1$　のとき　$x < y \Rightarrow a^x < a^y$

(ii)　$0 < a < 1$　のとき　$x < y \Rightarrow a^x > a^y$

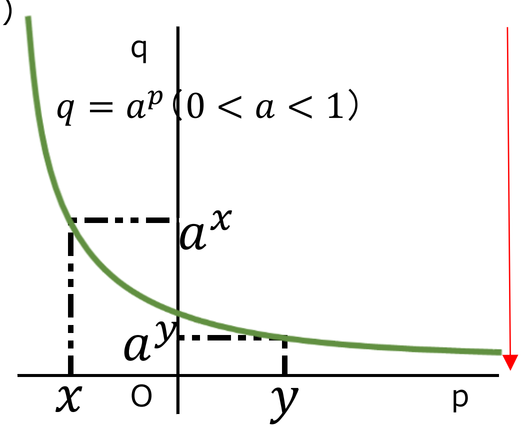
<指数の狭義単調性のイメージ>

(1)



pがどんどん大きくなるにつれqは増加

(2)



pがどんどん大きくなるにつれqは減少

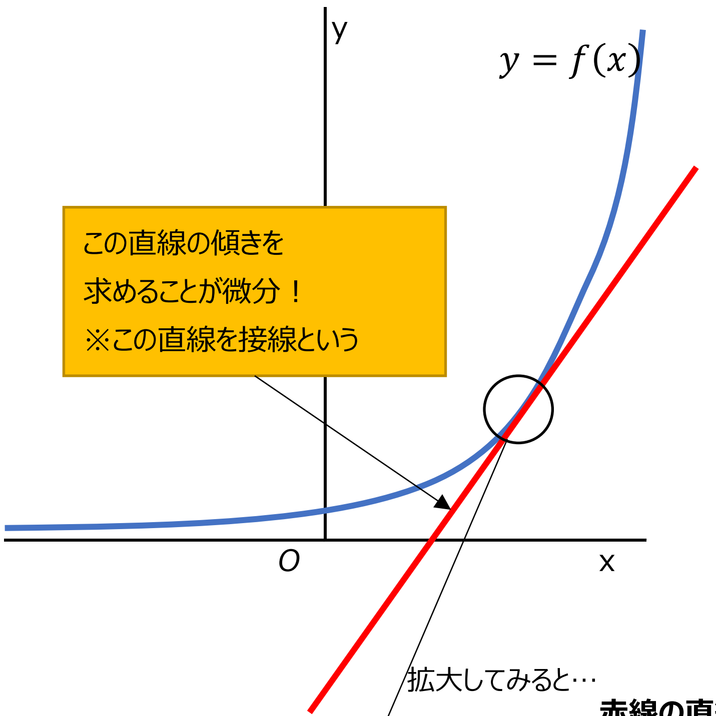
0-2 … 指数関数の微分とネイピア数について

本章の目的：指数関数を微分する

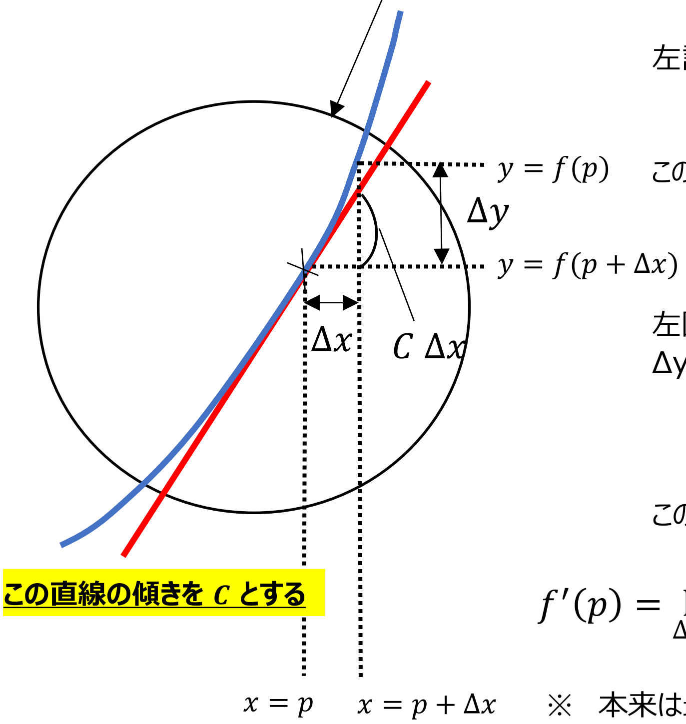
● **微分の復習**

※一般的なことについても述べたいのでしばし$f(x) = a^x$ とする。

微分とは？ … y の変化 Δy をx の変化 Δx の定数倍で表すこと



拡大してみると…



赤線の直線の傾き C をどのように求める？

左記の状況を数式でかくと…

$$\Delta y \fallingdotseq C\ \Delta x$$

この定数Cを求めることが微分！変形すると

$$C \fallingdotseq \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

左図でわかるように Δx が0に近づくほど
Δy と CΔx は近づいていくから

$$C = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

この C こそが p における微分係数で

$$f'(p) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(p + \Delta x) - f(p)}{\Delta x}$$

※ 本来は最後の式で形式的に定義され、その値が
傾きである直線を接線というのが正しい

それぞれの p について f'(p) が定まるとすれば x に対し f'(x) を対応させる関数ができあがり！
この関数を導関数といい、導関数を求めることを微分。（導関数を表す時も f'(x) と書くので注意！）

● 指数関数の微分

ところで本節の疑問は**「指数関数を微分すると？」**の話だった
さっきの式を指数関数にあてはめて指数関数の接線の傾きを求めてみよう！

$$(a^p)' = f'(p) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(p+\Delta x) - f(p)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{p+\Delta x} - a^p}{\Delta x} = (a^p) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

この値がもし 1 ならば

$$(a^p)' = a^p$$

という式をみたす指数関数が得られる！

そんな数が存在すれば、
微分してもまた同じような関数になるという関数が得られるわけですね？

それこそがネイピア数です。
ネイピア数はとっても都合いい数なんですよ。
つ、つ、つ、都合良い～♪
す、す、す、数字で～す♪

しかも、上の指数関数の微分をするときの式からわかるように
底がネイピア数でない場合の微分も帰着できそうですね～
都合いい数字だ…！

● ネイピア数

ネイピア数は下記の二つの表記を持つ数字である

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + (1/n)\right)^n$$

・右の極限が特殊な形をしており、似たような式があれば上式を用いてe に帰着できる
・高校数学では上記のように定義しているので、見慣れた形である

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

・無限級数表示はテイラー展開で指数関数を定義する大学以降の数学では一般的
・上記表示で計算するときはCaushyの積級数定理を用いることが多い

<u>本節で示すこと</u>
1．上記２式の右辺が値として存在すること
2．上記２式の右辺が一致すること
3．上記２式で定義した数を底とする指数関数は微分しても同じ表示の関数になること

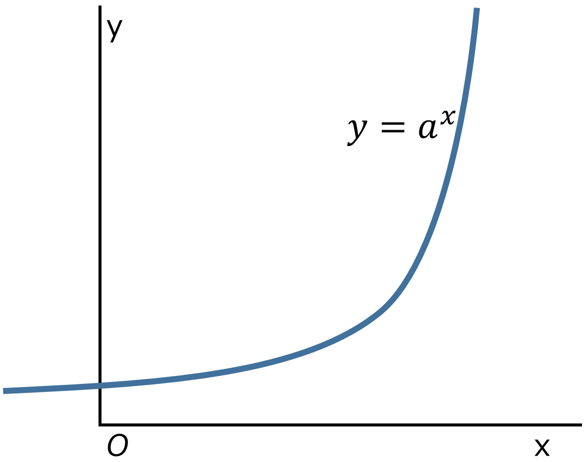
<u>以上を示すために前提とすること</u>
実数のある部分集合が空集合でなく、有界である場合、上限が存在する
（以上は実数という数を特徴づける重要な性質であり、大学の数学科は入学後すぐ習う）

0-3 … 対数函数と指数関数の対応について

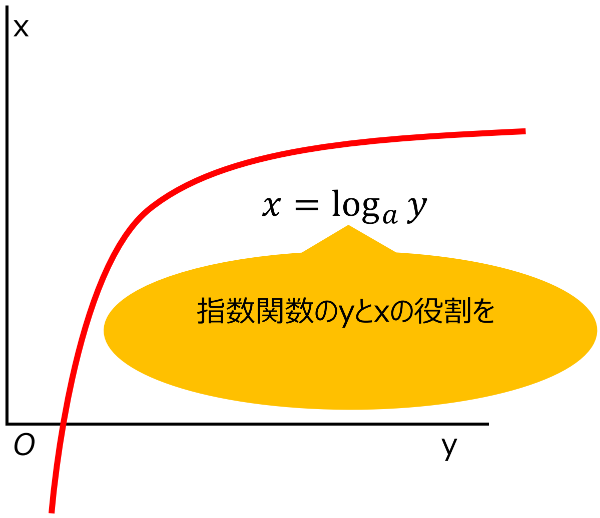
● 対数関数

指数関数の逆関数が対数函数！
※逆関数を定めることができるのは指数関数が全単射だから

指数関数



対数函数



● 対数関数の諸公式

対数函数の諸公式は指数関数の諸公式から導ける！！

対数函数の諸公式 $\longleftrightarrow$ 指数関数の諸公式

・対数の公式 ／ ・指数法則

$$\log_a XY = \log_a X + \log_a Y \longleftrightarrow a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\log_a c = (\log_a b)(\log_b c) \longleftrightarrow (a^x)^y = a^{xy}$$

・大小関係 ／ ・大小関係

$a > 1$　のとき ／ $a > 1$　のとき

$$x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y \longleftrightarrow x < y \Rightarrow a^x < a^y$$

$0 < a < 1$　のとき ／ $0 < a < 1$　のとき

$$x < y \Rightarrow \log_a x > \log_a y \longleftrightarrow x < y \Rightarrow a^x > a^y$$

※対数の公式の第２式を式変形すると「底の変換公式」が得られる
※対数の公式の第２式を式変形すると本節定理３（２）が得られる