2－1 Euclid 位相

Euclid 距離及び Euclid 位相

$\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ を任意にとり、2 点の距離 $\mathrm{d}(x, y)$ を下記のように定める。すると $\mathrm{d}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は下記（D1）から（D4）の条件を満たす。

$$\mathrm{d}(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{1/2}$$

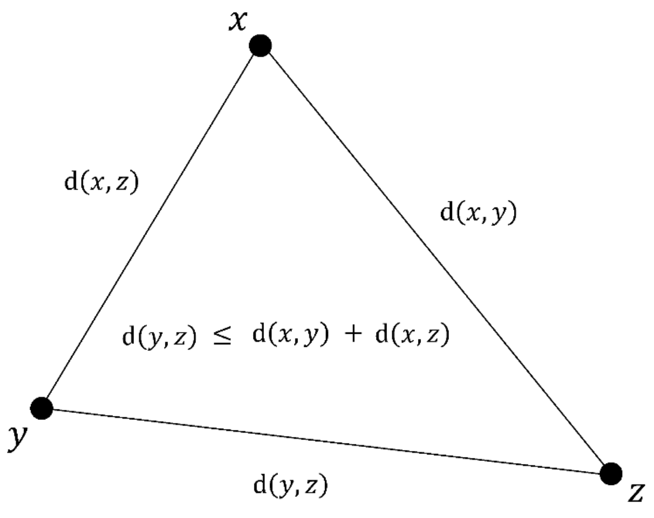
（D1）$\mathbb{R}^n \ni \forall x, \forall y, \mathrm{d}(x, y) \geq 0$

（D2）$\mathbb{R}^n \ni x, y, \mathrm{d}(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

（D3）$\mathbb{R}^n \ni \forall x, \forall y, \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$

（D4）$\mathbb{R}^n \ni \forall x, \forall y, \forall z, \mathrm{d}(x, z) \leq \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$

以上（D1）と（D2）を合わせて、距離の正値性、（D3）を距離の対称性、（D4）を三角不等式という。 $\mathbb{R}^n$ を単なる集合ではなく、上の距離を合わせて考える時、「$\mathbb{R}^n$に Euclid 位相を入れる」という。さらにこの距離 $\mathrm{d}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を（n 次元）Euclid 距離という。



（D3）三角不等式

（（D1）から（D4）が成り立つ証明）

（D1）

$\{1,2,\dots,n\}\ni\forall k, x_k-y_k\in\mathbb{R}$ であり、特に $(x_k-y_k)^2\geq 0$ 。各 k で足し合わせて $\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\geq 0$ が成立するので $\mathrm{d}(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}\geq 0$ 。

（D2）

$\mathrm{d}(x,y)=0\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2=0\Leftrightarrow\{1,2,\dots,n\}\ni\forall k,(x_k-y_k)^2=0\Leftrightarrow\{1,2,\dots,n\}\ni\forall k, x_k=y_k\Leftrightarrow x=y$ より成立。２つ目が成り立つのは $\{1,2,\dots,n\}\ni\forall k, x_k-y_k\in\mathbb{R}$ より。

（D3）

$\mathrm{d}(x,y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)^2\right)^{1/2}=\mathrm{d}(x,y)$ より成立。２つ目の等号が成り立つのは $\{1,2,\dots,n\}\ni\forall k, x_k-y_k\in\mathbb{R}$ より。

（D4）

まず $\mathbb{R}^n\ni\forall p,\forall q,\underline{\mathrm{d}(p,q)\leq\mathrm{d}(p,0)+\mathrm{d}(0,q)}$ が成立している。（左記で $\mathbb{R}^n\ni 0$ に注意せよ。）

これを用いれば $\mathbb{R}^n\ni\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_n),\forall y=(y_1,y_2,\dots,y_n),\forall z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ に対し $\mathbb{R}^n\ni x-y=(x_1-y_1,x_2-y_2,\dots,x_n-y_n), z-y=(z_1-y_1,z_2-y_2,\dots,z_n-y_n)$ であるので

$\mathrm{d}(x,z)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-z_k)^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{k=1}^{n}\{(x_k-y_k)-(z_k-y_k)\}^2\right)^{1/2}=\mathrm{d}(x-y,z-y)\leq\mathrm{d}(x-y,0)+\mathrm{d}(0,z-y)=\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k-y_k)^2\right)^{1/2}=\mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$

となるので OK。//

（※）下線部の証明は下記の通り。

$\mathbb{R}^n\ni\forall p=(p_1,p_2,\dots,p_n),\forall q=(q_1,q_2,\dots,q_n)$ をとる。さらに $\mathbb{R}\ni\forall t$ をとる。

すると $\{1,2,\dots,n\}\ni\forall k, tp_k-q_k\in\mathbb{R}$ より特に $(tp_k-q_k)^2\geq 0$ であるから各 k で足し合わせ

$$\left(\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2\right)t^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}p_kq_k\right)t+\left(\sum_{k=1}^{n}{q_k}^2\right)=\sum_{k=1}^{n}(tp_k-q_k)^2\geq 0$$

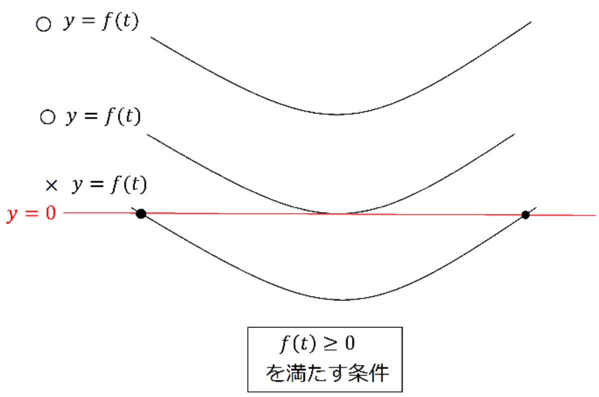
左辺の t に関する２次式が 0 となる方程式の判別式を D とすれば、上記不等式を満たしているからその方程式は異なる２つの実数解をもつことはないので $D\leq 0$ が成立している。ところで $D\leq 0\Leftrightarrow\left(\sum_{k=1}^{n}p_kq_k\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}{q_k}^2\right)\leq 0\Leftrightarrow\left|\sum_{k=1}^{n}p_kq_k\right|\leq\left(\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}{q_k}^2\right)^{1/2}$ だから $-2\sum_{k=1}^{n}p_kq_k\leq 2\left(\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}{q_k}^2\right)^{1/2}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2-2\sum_{k=1}^{n}p_kq_k+\sum_{k=1}^{n}{q_k}^2\leq\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2+2\left(\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}{q_k}^2\right)^{1/2}+\sum_{k=1}^{n}{q_k}^2\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}(p_k-q_k)^2\leq\left(\left(\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{k=1}^{n}{q_k}^2\right)^{1/2}\right)^2\Leftrightarrow\mathrm{d}(p,q)\leq\mathrm{d}(p,0)+\mathrm{d}(0,q)$ であるので最右辺が成立。//

（参考）

判別式のイメージは右図の通り。

$f(t)=\left(\sum_{k=1}^{n}{p_k}^2\right)t^2-2\left(\sum_{k=1}^{n}p_kq_k\right)t+\left(\sum_{k=1}^{n}{q_k}^2\right)$

としている。



Euclid 位相における内部・外部・境界

Euclid 位相では $\mathbb{R}^n$ のそれぞれの部分集合に対して内部・外部・境界が定まる。内部は元の集合に対して「フチ」をとった集合、外部は元の集合の補集合に対して「フチ」をとった集合。境界は元の集合に対して「フチ」にあたる集合。これは元の集合の補集合の「フチ」にもなっている。

以上を数学的に定義する時、集合を構成する点で考える。内部を構成するのが内点、外部を構成するのが外点、境界を構成するのが境界点である。そしてそれぞれの点が内点・外点・境界点のどれにあたるかは ε球によって記述される。

（１）ε球（開球体）

$\mathbb{R}^n \ni a, \varepsilon > 0$ に対し $B(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) < \varepsilon\}$ を中心 a 半径 ε の ε球または開球体とよぶ。$\forall \varepsilon > 0, \mathrm{d}(a,a) = 0 < \varepsilon$ が成立しているので $\forall \varepsilon > 0, B(a;\varepsilon) \ni a$ が成立。

（２）内点と内部

$\mathbb{R}^n \supset M$ とする。M の内点と内部を下記のように定める。

$$\mathbb{R}^n \ni a \text{ が } M \text{ の内点} \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B(a;\varepsilon) \subset M$$

$$\mathbb{R}^n \supset N \text{ が } M \text{ の内部} \Longleftrightarrow N = \{a \in \mathbb{R}^n | a \text{ が } M \text{ の内点}\}$$

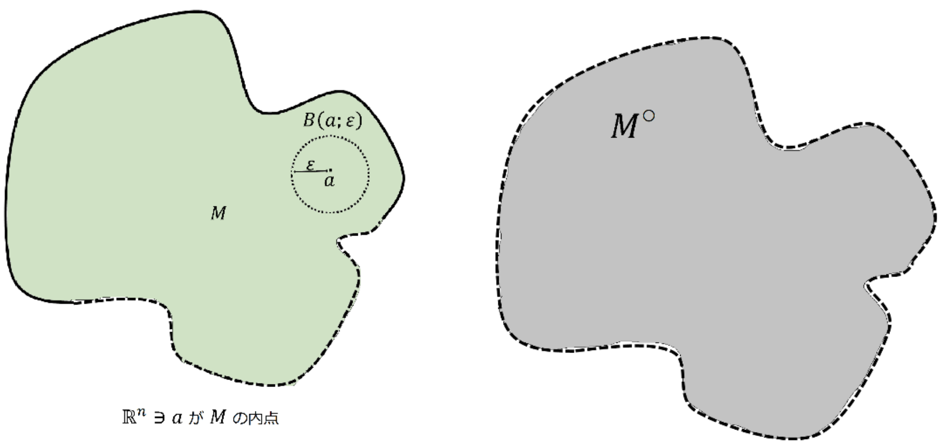
さらに M の内部を M^i や M° で表す。すると以下の２つが成立。

(A) $M^\circ \subset M$

(B) $M = \emptyset \Longrightarrow M^\circ = \emptyset$

（証明）

$M^\circ \ni \forall x$ をとれば $\exists \varepsilon > 0, B(x;\varepsilon) \subset M$ であり（１）で確認したことから $x \in B(a;\varepsilon) \subset M$ より(A)が成立。(B)は対偶の成立を示す。$M^\circ \neq \emptyset$ でないとすれば(A)に注意して $\exists x \in M^\circ \subset M$ となり $M \neq \emptyset$ が成立するので(B)が成立。//



$\mathbb{R}^n \ni a$ が M の内点

（３）外点と外部

$\mathbb{R}^n \supset M$ とする。 M の外点と外部を下記のように定める。

$$\mathbb{R}^n \ni a \text{ が } M \text{ の外点} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \ni a \text{ が } M^c \text{ の内点} \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0, B(a;\varepsilon) \subset M^c$$

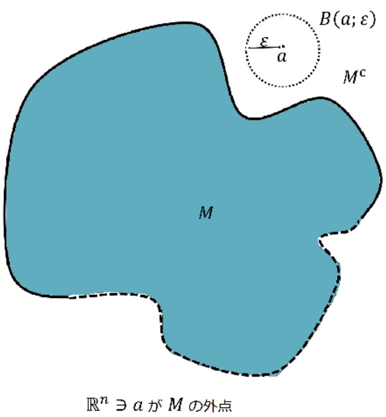
$$\mathbb{R}^n \supset N \text{ が } M \text{ の外部} \Leftrightarrow N = \{a \in \mathbb{R}^n | a \text{ が } M\text{の外点}\} = (M^c)^\circ$$

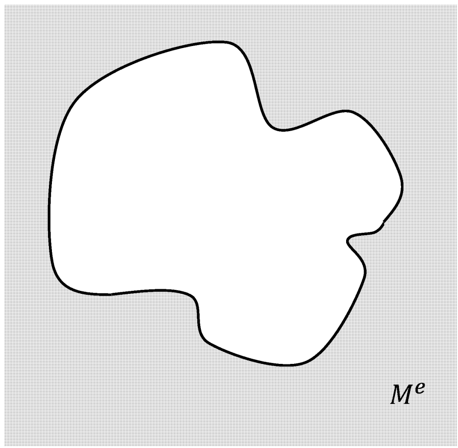
さらに M の外部を M^e で表す。すると以下が成立。

(C) $M^\circ \cap M^e = \emptyset$

（証明）

(A)に注意すれば $M^\circ \subset M, M^e = (M^c)^\circ \subset M^c$ であるので $M^\circ \cap M^e \subset M \cap M^\circ = \emptyset$ が成立。//





（４）境界点と境界

$\mathbb{R}^n \supset M$ とする。 M の境界点と境界を下記のように定める。

$$\mathbb{R}^n \ni a \text{ が } M \text{ の境界点} \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \ni a \text{ が } M \text{ の外点でも内点でもない} \Leftrightarrow a \notin M^\circ \wedge a \notin M^e$$

$$\mathbb{R}^n \supset N \text{ が } M \text{ の境界点} \Leftrightarrow N = \{a \in \mathbb{R}^n | a \text{ が } M \text{ の境界点}\}$$

さらに M の境界を M^f で表す。すると以下の２つが成立。

(D) $\mathbb{R}^n \supset M, M^\circ \cup M^e \cup M^f = \mathbb{R}^n$ （直和）

(E) $\mathbb{R}^n \supset M, M^f \ni a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, B(a;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset \wedge B(a;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$

（証明）

上記境界点の定義式を必要十分条件でいいかえると $M^f \ni a \Leftrightarrow a \notin M^\circ \wedge a \notin M^e = (M^c)^\circ \Leftrightarrow a \in (M^\circ)^c \wedge a \in (M^e)^c \Leftrightarrow a \in (M^\circ)^c \cap (M^e)^c \Leftrightarrow a \in (M^\circ \cup M^e)^c$ がそれぞれ成立。すると

$$(M^\circ \cup M^e) \cup M^f = \mathbb{R}^n \quad \text{（直和）}$$

ここで(C)に注意すれば(D)が成立。上式の言い換えの最後はド・モルガンの法則より。内点の条件に注意して境界点の定義式を言い換えれば $M^f \ni a \Leftrightarrow a \notin M^\circ \wedge a \notin M^e = (M^c)^\circ \Leftrightarrow \neg(a \in M^\circ) \wedge \neg(a \in (M^c)^\circ) \Leftrightarrow \neg(\exists\varepsilon_1 > 0, B(a;\varepsilon_1) \subset M) \wedge \neg(\exists\varepsilon_2 > 0, B(a;\varepsilon_2) \subset M^c) \Leftrightarrow \neg(\exists\varepsilon_1 > 0, \forall x, x \in B(a;\varepsilon_1) \Rightarrow x \in M) \wedge \neg(\exists\varepsilon_2 > 0, \forall x, x \in B(a;\varepsilon_2) \Rightarrow x \in M^c) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon_1 > 0, \exists x, x \in B(a;\varepsilon_1) \wedge x \in M^c) \wedge (\forall\varepsilon_2 > 0, \exists x, x \in B(a;\varepsilon_2) \wedge x \in M) \Leftrightarrow \forall\varepsilon_1 > 0, B(a;\varepsilon_1) \cap M^c \neq \emptyset \wedge \forall\varepsilon_2 > 0, B(a;\varepsilon_2) \cap M \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, B(a;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset \wedge B(a;\varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ となり、(E)が成立。//

（５）触点と触集合（または閉包）

$\mathbb{R}^n \supset M$ とする。 M の触点と触集合を下記のように定める。

$$\mathbb{R}^n \ni a \text{ が } M \text{ の触点} \Leftrightarrow a \in M^\circ \cup M^f$$

$$\mathbb{R}^n \supset N \text{ が } M \text{ の触集合（または閉包）} \Leftrightarrow N = M^\circ \cup M^f$$

さらに M の触集合（または閉包）を $\bar{M}$ や M^a で表す。すると以下が成立。

(F) $\mathbb{R}^n \supset M, \bar{M} = M^\circ \cup M^f = \mathbb{R}^n \setminus M^e = (M^e)^c = ((M^c)^\circ)^c$

(G) $\mathbb{R}^n \supset M, M^\circ \subset M \subset \bar{M}$

（証明）

(F)の式の２つめの等号は先程の(D)より成立。また、最後の等号は（３）の定義より。 (G)の左の包含関係は(A)より成立。右の包含関係は(F)より $(\bar{M})^c = ((M^e)^c)^c = M^e = (M^c)^\circ \subset M^c$ が成立しているので（最後の包含関係は再び(A)を用いた）集合演算により $\bar{M} \supset M$ が成立。//

例題１　開球体と閉球体

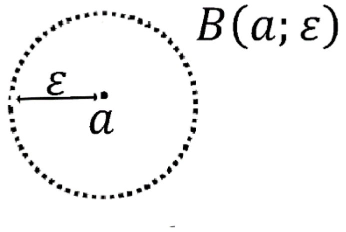
$\mathbb{R}^n \ni a, \varepsilon > 0$ とする。$M = B(a;\varepsilon)$ と定めれば下記が成立。

（１） $M^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) < \varepsilon\} = B(a;\varepsilon) = M$

（２） $M^e = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) > \varepsilon\}$

（３） $M^f = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) = \varepsilon\}$

（４） $\bar{M} = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) \le \varepsilon\}$



（証明）

（１）

(A)より $M^\circ \supset M$ を証明すればよい。$M = B(a;\varepsilon) \ni \forall x$ をとる。すると $\mathrm{d}(x,a) < \varepsilon$ だから $\varepsilon_0 = \varepsilon - \mathrm{d}(x,a) > 0$ となる正の数 ε_0 を定めることができる。ここで $\underline{B(x;\varepsilon_0) \subset B(a;\varepsilon)} = M$ となり $M^\circ \ni x$ となって $M^\circ \supset M$ が証明できる。

※下線部分の証明

$B(x;\varepsilon_0) \ni \forall y$ をとると三角不等式より

$$\mathrm{d}(y,a) \le \mathrm{d}(y,x) + \mathrm{d}(x,a) < \varepsilon_0 + \mathrm{d}(x,a) = \big(\varepsilon - \mathrm{d}(x,a)\big) + \mathrm{d}(x,a) = \varepsilon$$

となるので $B(a;\varepsilon) \ni y$ が成立し $B(x;\varepsilon_0) \subset B(a;\varepsilon)$ が証明できる。//

（２）

両側の包含関係を示す。まず $\{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) > \varepsilon\} \subset M^e$ を示す。$\{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) > \varepsilon\} \ni \forall x$ をとると $\mathrm{d}(x,a) > \varepsilon$ だから $\varepsilon_0 = \mathrm{d}(x,a) - \varepsilon > 0$ となる正の数 ε_0 を定めることができる。ここで $\underline{B(x;\varepsilon_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) > \varepsilon\}} = M^c$ となり $M^e = (M^c)^\circ \ni x$ となって $\{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) > \varepsilon\} \subset M^e$ が証明できる。

次に $\{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) > \varepsilon\} \supset M^e$ を示す。そのために $M^e \ni \forall x, \mathrm{d}(x,a) \neq \varepsilon$ を示す。実際、外部の定義より $M^e = (M^c)^\circ \subset M^c = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) \geq \varepsilon\}$ がわかるので $M^e \ni \forall x, \mathrm{d}(x,a) \neq \varepsilon$ が示されれば $M^e \subset \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) \geq \varepsilon\} \cap \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) = \varepsilon\}^c = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) > \varepsilon\}$ がいえる。さて示したい命題をいいかえると $M^e \ni x \Rightarrow \mathrm{d}(x,a) \neq \varepsilon$ であってその対偶は $\mathrm{d}(x,a) = \varepsilon \Rightarrow M^e \not\ni x$ で $M^e \not\ni x \Leftrightarrow \neg(\exists \varepsilon_0 > 0, B(x;\varepsilon_0) \subset M^c) \Leftrightarrow \neg(\exists \varepsilon_0 > 0, \forall y, y \in B(x;\varepsilon_0) \Rightarrow x \in M^c) \Leftrightarrow \forall \varepsilon_0 > 0, \exists y, y \in B(x;\varepsilon_0) \wedge y \in M \Leftrightarrow \forall \varepsilon_0 > 0, B(x;\varepsilon_0) \cap M \neq \emptyset$ と言い換えられるので示すべきは

$$\mathrm{d}(x,a) = \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon_0 > 0, B(x;\varepsilon_0) \cap M \neq \emptyset$$

という命題。そこで $\mathrm{d}(x,a) = \varepsilon$ となる $\mathbb{R}^n \ni \forall x$ をとる。さらに $\forall \varepsilon_0 > 0$ をとり $\delta = \min\{1, \varepsilon_0/(2\varepsilon)\}$ という正の数 δ をとる。すると $\mathbb{R}^n \ni y = x + \delta(a - x)$ をとれば $\varepsilon_0/(2\varepsilon) \geq 1$ の場合は $B(x;\varepsilon_0) \cap M \ni y = a$ となり $B(x;\varepsilon_0) \cap M \neq \emptyset$ がいえる。 $\varepsilon_0/(2\varepsilon) < 1$ の場合は

$$\mathrm{d}(y,a) = \mathrm{d}(x + \delta(a-x), a) = \mathrm{d}(\delta(a-x), a-x) = \mathrm{d}\big((\delta-1)(a-x), 0\big)$$
$$= |(\delta-1)|\mathrm{d}(a-x,0) = (1-\delta)\mathrm{d}(a,x) < \mathrm{d}(a,x) = \varepsilon$$
$$\mathrm{d}(y,x) = \mathrm{d}(x + \delta(a-x), x) = \mathrm{d}(\delta(a-x), 0) = |\delta|\mathrm{d}(a-x,0) = \delta \mathrm{d}(a-x,0)$$
$$\leq (\varepsilon_0/(2\varepsilon))\mathrm{d}(a,x) = (\varepsilon_0/(2\varepsilon))\varepsilon = \varepsilon_0/2 < \varepsilon_0$$

であるのでそれぞれ $M \ni y$ と $B(x;\varepsilon_0) \ni y$ がいえてこの場合も $B(x;\varepsilon_0) \cap M \neq \emptyset$ となる。以上を合わせて $\{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) > \varepsilon\} \supset M^e$ が成立する。//

※下線部分の証明

$B(x;\varepsilon_0) \ni \forall y$ をとると $-\varepsilon_0 < -\mathrm{d}(y,x)$ であり、三角不等式より

$$\varepsilon + \varepsilon_0 = \mathrm{d}(x,a) \leq \mathrm{d}(y,x) + \mathrm{d}(y,a)$$

だから $\mathrm{d}(y,a) \geq \varepsilon + \varepsilon_0 - \mathrm{d}(y,x) > \varepsilon$

となるので $\{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) > \varepsilon\} \ni y$ が成立し $B(x;\varepsilon_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) > \varepsilon\}$ が証明できる。

（３）

先程の(D)に注意して $M^f = \mathbb{R}^n \setminus (M^\circ \cup M^e) = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) = \varepsilon\}$ が示される。//

（４）

先程の(F)より $\bar{M} = M^\circ \cup M^f = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) \leq \varepsilon\}$ が示される。//

※上記において

$\mathbb{R}^n \ni a, \varepsilon > 0$ に対し $B(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) < \varepsilon\}$ を中心 a 半径 ε の ε球または開球体。
$\mathbb{R}^n \ni a, \varepsilon > 0$ に対し $B^*(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) \leq \varepsilon\}$ を中心 a 半径 ε の ε球または閉球体
とそれぞれ呼ぶことがある。

開球体は集合の内部・外部・境界を定義するために重要な概念。より一般の位相の観点では、次に述べる開集合・閉集合について Euclid 位相は開球体によって特徴づけられている。閉球体を中心に使うことは少ないが次に述べる閉集合の特別な場合と考えればよい。

Euclid 位相における開集合・閉集合

Euclid 位相の開集合と閉集合を先程説明した内部・外部・境界によって定義する。一般の位相では、その集合で定められている開集合（の集合系）から様々な概念が定義される。最終的には後節で Euclid 位相から（距離も定義されていないような）一般の位相へ拡張するために距離を使わずに表現できる開集合や閉集合の性質を確認する。そのために Euclid 位相の開集合・閉集合の性質を調べる。

$\mathbb{R}^n \supset M$ とする。M の開集合と閉集合を下記のように定める。

$$\mathbb{R}^n \supset M \text{ が開集合} \Leftrightarrow M = M^\circ \Leftrightarrow M \subset M^\circ$$

$$\mathbb{R}^n \supset M \text{ が閉集合} \Leftrightarrow M = \bar{M} \Leftrightarrow M \supset \bar{M}$$

例

$\mathbb{R}^n \ni a, \varepsilon > 0$ に対し、例題 1 の結果から開球体 $B(a;\varepsilon)$ は開集合、後に証明する定理４(A2)の結果と併せて、閉球体 $B^*(a;\varepsilon)$ は閉集合。

例題２　１次元 Euclid 位相の開集合と閉集合の例（開区間・閉区間）

$\mathbb{R} \ni a, b, a < b$ とすれば下記が成立。

（１）$(a\ b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ は $\mathbb{R}$ の開集合

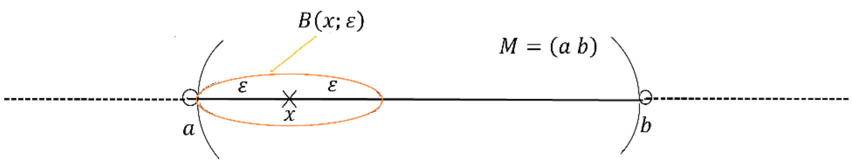
（２）$[a\ b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合

（証明）

（１）

$M = (a\ b)$ とする。M が開集合であることを示すためには $M \subset M^\circ$ を証明すればよい。$M \ni \forall x$ をとると $a < x < b$ が成立。$\varepsilon_1 \coloneqq \min\{x - a, b - x\}$ とすると $\underline{B(x;\varepsilon_1) \subset M}$ が成立し $M \subset M^\circ$。//

※下線部分の証明



$B(x;\varepsilon_1) \ni \forall y$ をとると

$|x - y| = \mathrm{d}(x, y) < \varepsilon_1$

である。

(ⅰ) $x < y$ のとき

$-x + y = |x - y| < \varepsilon_1$ であるので $\underline{y} < x + \varepsilon_1 \leq x + (b - x) = \underline{b}$ が成立している。さらに $\underline{y} > x > \underline{a}$ であるので下線部２つの不等式を合わせて $a < y < b$ となる。したがって $y \in M$。

(ⅱ) $x > y$ のとき

$x - y = |x - y| < \varepsilon_1$ であるので $\underline{y} > x - \varepsilon_1 \geq x - (x - a) = \underline{a}$ が成立している。さらに $\underline{y} < x < \underline{b}$ であるので下線部２つの不等式を合わせて $a < y < b$ となる。したがって $y \in M$。

(ⅰ)(ⅱ)の場合合わせて $y \in M$ がいえるので $B(x;\varepsilon_1) \subset M$。//

（2）

$N = [a\ b]$ とする。 N が閉集合であることを示すためには $N \supset \bar{N}$ を証明すればよい。これは $N^{\mathrm{c}} \subset (\bar{N})^{\mathrm{c}} = (N^{\mathrm{c}})^{\circ}$ を示すことと同値である。そこで $N^{\mathrm{c}} \ni \forall x$ をとると $x < a$ または $b < x$ が成立。

(ｉ) $x < a$ のとき

$\varepsilon_2 \coloneqq a - x$ とすれば $B(x; \varepsilon_2) \subset N^{\mathrm{c}}$ が成立する。

実際 $B(x; \varepsilon_2) \ni \forall y$ をとると $|x - y| = \mathrm{d}(x, y) < \varepsilon_2$ が成立する。

(ア) $y < x$ の場合は $y < x < a$ となるから $y \in (-\infty\ a)$ 。

(イ) $x < y$ の場合は $-x + y = -(x - y) = |x - y| < \varepsilon_2$ となるから $y < x + \varepsilon_2 = x + (a - x) = a$ となるから $y \in (-\infty\ a)$ 。

(ア)(イ)のいずれの場合も $y \in (-\infty\ a) \subset N^{\mathrm{c}}$ がいえて $B(x; \varepsilon_2) \subset N^{\mathrm{c}}$ 。

(ⅱ) $b < x$ のとき

$\varepsilon_3 \coloneqq x - b$ とすれば $B(x; \varepsilon_3) \subset N^{\mathrm{c}}$ が成立する。

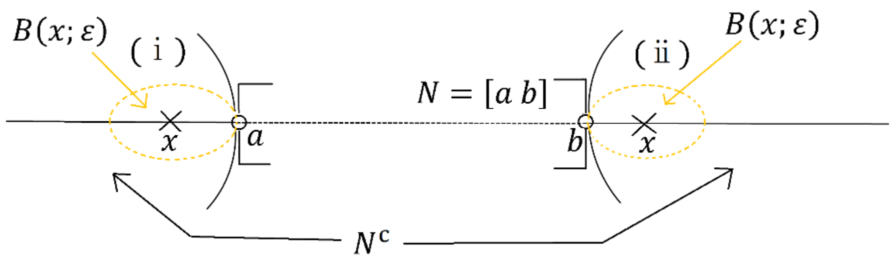
実際 $B(x; \varepsilon_3) \ni \forall y$ をとると $|x - y| = \mathrm{d}(x, y) < \varepsilon_3$ が成立する。

(ア) $x < y$ の場合は $b < x < y$ となるから $y \in (b\ \infty)$ 。

(イ) $y < x$ の場合は $x - y = |x - y| < \varepsilon_3$ となるから $y > x - \varepsilon_3 = x - (x - b) = b$ となるから $y \in (b\ \infty)$ 。

(ア)(イ)のいずれの場合も $y \in N^{\mathrm{c}}$ がいえて $B(x; \varepsilon_3) \subset N^{\mathrm{c}}$ 。

(ｉ)(ⅱ)のいずれも $\exists \varepsilon > 0, B(x; \varepsilon) \subset N^{\mathrm{c}}$ がいえるから $x \in (N^{\mathrm{c}})^{\circ}$ となるので $N^{\mathrm{c}} \subset (N^{\mathrm{c}})^{\circ}$ がいえて証明できた。//



定理１　開集合と閉集合の関係

$\mathbb{R}^n$ において開集合の補集合は閉集合、閉集合の補集合は開集合

（証明）

$\mathbb{R}^n \supset O$ を開集合とすると定義より $O = O^{\circ}$ なので(F)に注意し $O^{\mathrm{c}} = (O^{\circ})^{\mathrm{c}} = \overline{O^{\mathrm{c}}}$ が成立し O^{c} は閉集合。

$\mathbb{R}^n \supset F$ を閉集合とすると定義より $F = \bar{F}$ なので(F)に注意し $F^{\mathrm{c}} = (\bar{F})^{\mathrm{c}} = (F^{\mathrm{c}})^{\circ}$ が成立し F^{c} は開集合。//

Euclid 位相における開集合系・閉集合系

開集合系は開集合の集合、閉集合系は閉集合の集合。一般的に位相は開集合系または閉集合系が決まれば自ずと決まる。特に Euclid 位相では、開集合は ε球によって定まる内部という概念から定義した。ここにおいて、Euclid の位相の本質は ε球にあるといえる。さて、そもそも距離の構造が入っていない場合に位相を考えることはできるだろうか。この場合は、距離の構造が入っていないため ε球という概念が使えなくなる。そこで、位相を開集合系で定義することで距離の構造がなくとも集合に位相構造を与える。そうしたときに、単に部分集合を集めてきて開集合と定義して実用性がなければ意味がないから、開集合（または開集合系）に一定の「制約」を課すことにする。この「制約」により、Euclid 位相から他の位相へと概念を拡張していく。そのためにはまず Euclid 位相の開集合（または開集合系）の性質を確認し、何を開集合系の「制約」にするのかを考えていく。

（１）開集合系

$\mathbb{R}^n$ の Eulid 位相で定めた開集合の全体の集合を Euclid 位相の開集合系といって $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ で表す。(B)で確認したように $O=\emptyset \Rightarrow O^\circ=\emptyset$ であったから $(\emptyset)^\circ=\emptyset$ となるので $\emptyset \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ がわかる。これにより $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow O=O^\circ \Leftrightarrow O \subset O^\circ \Leftrightarrow O \ni \forall x, x \in O^\circ \Leftrightarrow O \ni \forall x, \exists \varepsilon>0, B(x;\varepsilon) \subset O$。
※空集合 $\emptyset$ には元が存在しないため、元をとるような命題は全て成立。したがって勿論 $\emptyset$ については上記同値変形内の命題は全て真。

定理２　Euclid 位相の開集合系の性質

$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ について下記三式が成立

（O1）　$\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

（O2）　$O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

（O3）　$\forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ なる $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \supset \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

（証明）

（O1）

$\emptyset \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ は先程示した。 $\mathbb{R}^n \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ は下記のように示す。実際 $\mathbb{R}^n \ni \forall x$ をとると $B(x;1) \subset \mathbb{R}^n$ であり OK。//（半径 1 としてとったがこれは本質的なものでなく、正であればどのような値でもよい。）

（O2）

$O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ とする。この条件のもと $O_1 \cap O_2 \subset (O_1 \cap O_2)^\circ$ を示す。まず $O_1 \cap O_2 \ni \forall x$ をとる。このとき $O_1 \ni x$ かつ $O_2 \ni x$ で $O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ の条件により $O_1 = {O_1}^\circ \ni x$ かつ $O_2 = {O_2}^\circ \ni x$。それぞれ論理記号で書けば

$$\exists \varepsilon_1, B(x;\varepsilon_1) \subset O_1$$

$$\exists \varepsilon_2, B(x;\varepsilon_2) \subset O_2$$

そこで $\varepsilon_0 \coloneqq \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とすれば

$$B(x;\varepsilon_0) \subset B(x;\varepsilon_1) \subset O_1$$
$$B(x;\varepsilon_0) \subset B(x;\varepsilon_2) \subset O_2$$
がそれぞれ成立するので $B(x;\varepsilon_0) \subset O_1 \cap O_2$ が成立し $O_1 \cap O_2 \subset (O_1 \cap O_2)^\circ$ となる。//

（O3）

条件のもと $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \subset (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda)^\circ$ を示す。まず $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \ni \forall x$ をとる。このとき $\exists\lambda_0 \in \Lambda, O_\lambda \ni x$ が成立し $\forall\lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ の条件より ${O_{\lambda_0}}^\circ = O_{\lambda_0} \ni x$ であるので

$$\exists\varepsilon_0 > 0, B(x;\varepsilon_0) \subset O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

以上より $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda)^\circ \ni x$ が成立するので $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \subset (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda)^\circ$ となる。//

（２）閉集合系

$\mathbb{R}^n$ の Eulid 位相で定めた閉集合の全体の集合を Euclid 位相の開集合系といって $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ で表す。

定理３　Euclid 位相の閉集合系の性質

$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ について下記三式が成立

（F1）　$\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

（F2）　$F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

（F3）　$\forall\lambda \in \Lambda, F_\lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ なる $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \supset \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

（証明）

（F1）

$\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ が定理２(O1)より成り立ち、定理１より閉集合の補集合は開集合であるから $\mathbb{R}^n = (\emptyset)^c \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}^n = (\emptyset)^c \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$。 //

（F2）

$F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とする。定理１より閉集合の補集合は開集合であるから $(F_1)^c, (F_2)^c \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ であるので定理２(O2)とド・モルガンの法則を用いて $(F_1 \cup F_2)^c = (F_1)^c \cap (F_2)^c \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ となる。よって再び定理１より $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$。//

（F3）

$\forall\lambda \in \Lambda$ をとる。$F_\lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ であり、定理１より閉集合の補集合は開集合であるから $(F_\lambda)^c \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ である。したがって $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \supset \{(F_\lambda)^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ であり定理２(O3) とド・モルガンの法則を用いて $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (F_\lambda)^c \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ となる。よって再び定理１より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$。//

<u>Euclid 位相における開核・閉包の特徴づけ</u>

一般の位相では、Euclid 位相を特徴づけている ε球があるとは限らない。（ ε球が定義されるには少なくとも距離が定義されていなければならない。）したがって、内部や閉包という概念は別の記述で定義する必要がある。そのために Euclid 位相の内部や閉包の特徴を再考する。ところで $\mathbb{R}^n$ の全ての部分集合に対し、その内部や閉包が定義できる（しかもそれは再び $\mathbb{R}^n$ の部分集合である）のでその集合からその内部や閉集合を対応させる写像を考えることができる。そのような写像を開核作用素、閉包作用素といい、後の一般の位相について述べる時に再度取り上げる。ところで、一般の位相において内部を閉包と対応させて開核と呼ぶことに留意しておく。

定理４　Euclid 位相の開核作用素および閉包作用素の性質

$\mathbb{R}^n \supset M, N$ とする。

(I1) $M \supset N \Rightarrow M^\circ \supset N^\circ$

(I2) $(M^\circ)^\circ = M^\circ$ つまり $M^\circ \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

(I3) M° は M に含まれる最大の開集合

(A1) $M \supset N \Rightarrow \overline{M} \supset \overline{N}$

(A2) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ つまり $\overline{M} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

(A3) $\overline{M}$ は M を含む最小の開集合

（証明）

(I1) $M \supset N$ とする。$N^\circ \ni \forall x$ をとると $\exists \varepsilon > 0, B(x;\varepsilon) \subset N$ であるから特に $B(x;\varepsilon) \subset N \subset M$ となるので $M^\circ \ni x$。よって $M^\circ \supset N^\circ$。//

(I2) $(M^\circ)^\circ \supset M^\circ$ を示す。$M^\circ \ni \forall x$ をとると $\exists \varepsilon > 0, B(x;\varepsilon) \subset M$。ところで $B(x;\varepsilon)$ は開集合であり、(I1)を用いると $B(x;\varepsilon) = (B(x;\varepsilon))^\circ \subset M^\circ$ となるので $(M^\circ)^\circ \ni x$。//

(I3) $M \supset \forall N$（開集合）をとる。 N は開集合であるから $N^\circ = N$ であって(I1)を用いて $M^\circ \supset N^\circ = N$ であり M° は N より大きく(I2)より開集合。//

(A1) $M \supset N$ とする。このとき $M^c \subset N^c$ であり (I1)より $(\overline{M})^c = (M^c)^\circ \subset (N^c)^\circ = (\overline{N})^c$。したがって $\overline{M} \supset \overline{N}$。//

(A2) $\overline{\overline{M}} = (((\overline{M})^c)^\circ)^c = ((((((M)^c)^\circ)^c)^c)^\circ)^c = ((((M)^c)^\circ)^\circ)^c = (((M)^c)^\circ)^c = \overline{M}$。

※左から４つ目の等号は(I2)より成立。//

(A3) $M \subset \forall N$（閉集合）をとる。 N は閉集合であるから $\overline{N} = N$ であって(A1)を用いて $\overline{M} \subset \overline{N} = N$ であり $\overline{M}$ は N より小さく(I2)より開集合。//

Euclid 位相の基底

Euclid 位相を特徴づけているのは ε球であることは既に述べた。このような位相の本質にあたる部分を考えるときに基底が便利である。開集合は基底の和集合でかけるので、開集合の問題は直ちに基底の問題に置き換わる。さて、一般的な位相の基底について後で述べることができるように、ここでは基底の定義と Euclid 位相ではどのような基底が考えられるかを確認する。

$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \supset \mathcal{U}$ とする。

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \ni \forall O, \exists \{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{U}, O = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$$

が成立するとき $\mathcal{U}$ を Euclid 位相の基底。これを日本語に訳せば「開集合は基底の元の和でかける」。

定理５　開球体の集合は Euclid 位相の基底

$\mathbb{R}^n$ の開球体全体は Euclid 位相の基底。

（証明）

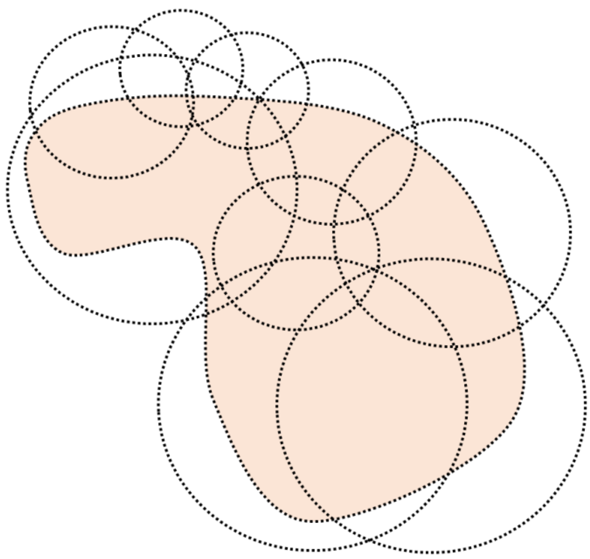
$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \ni \forall O$ をとる。 O は開集合だから $O^\circ \supset O$ なので $O \ni \forall x$ をとると

$$\exists \varepsilon_x > 0, B(x;\varepsilon_x) \subset O$$

すると $O = \bigcup_{x\in O} B(x;\varepsilon_x)$ が成立。したがって $\mathcal{U} = \{B(x;\varepsilon) | x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0\}$ と $\mathcal{B} = \{B(x;\varepsilon_x) | x \in O\}$ とすれば $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ で O は $\mathcal{B}$ の元の和でかけているから $\mathcal{U}$ は Euclid 位相の基底。//

※下線部分の証明

各 x について $B(x;\varepsilon_x) \subset O$ だから、それらの和集合をとっても $\bigcup_{x\in O} B(x;\varepsilon_x) \subset O$。ところで $O \ni \forall x$ をとると $x \in B(x;\varepsilon_x)$ であり $O \subset B(x;\varepsilon_x)$ で、各 x について和集合をとれば $O \subset \bigcup_{x\in O} B(x;\varepsilon_x)$。



Euclid 位相における連続関数

関数が連続であることは $\varepsilon\delta$論法を用いて記述された。一方で $\varepsilon\delta$論法では定義域や終域に距離の構造が入っていないと連続を定義できず、一般的な位相の場合は使えない。そこで、後々に一般的な位相の連続関数について定義するために、 $\varepsilon\delta$論法から始めて Euclid 位相の連続関数の距離を使わずに記述できる性質を調べる。その中で、最大値存在定理や中間値の定理を証明する。最大値の存在定理は、平均値の定理（ロルの定理）の証明するときに、中間値の定理は一見複雑な方程式に解が存在することを証明するときに使用されるなどそれぞれ解析学を支える重要な事実となっている。

○点列の極限について（εN論法）
$\mathbb{R}^n \supset \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ とする。
$\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}^n \ni x$ に収束するとは下記の命題が成立すること。

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \geq 1 (m \geq N \Longrightarrow \mathrm{d}(x_m, x) < \varepsilon)$$

なお、数列 $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ が $\mathbb{R}^n \ni x$ に収束するとき $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ とかく。

※イメージは数列のときと同様に「 m を限りなく大きくしていくにつれ x_m は x に近づいていく」である。

○関数の極限について（$\varepsilon\delta$論法）
$\mathbb{R}^n \supset M$ とする。
$f: M \to \mathbb{R}$ 関数とする。
$\mathrm{d}_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 1 次元 Euclid 距離
$\mathrm{d}_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ n次元 Euclid 距離
$M \ni x$ とする。関数 f が x において c に収束するとは下記の命題が成立すること。

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall y \in M, (\mathrm{d}_n(y, x) < \delta \Longrightarrow \mathrm{d}_1(f(y), c) < \varepsilon)$$

なお、関数 f が x において c に収束するとき $\lim_{y\to x} f(y) = c$ とかく。

※イメージは「 y を x に限りなく近づけるにつれ $f(y)$ は c に近づいていく」である。

○関数の連続について（$\varepsilon\delta$論法）
$\mathbb{R}^n \supset M$ とする。
$f: M \to \mathbb{R}$ 関数とする。

（１） $M \ni x$ とする。関数 f が x において連続であるとは $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$ を満たすこと。

（２） 関数 f が M において連続であるとは $M \ni \forall x$ において連続であること。

以上関数の概念を後に一般の位相へ拡張するために、ここでは本節で説明した Euclid 位相の言葉で定義しなおす。

定理６ 数列の極限

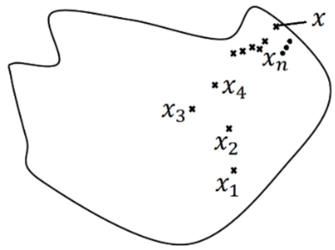
$\mathbb{R}^n \ni x, \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ とする。

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \geq 1 (m \geq N \Longrightarrow x_m \in B(x;\varepsilon))$$

（証明）

$\mathrm{d}(x_m, x) < \varepsilon$ を $x_m \in B(x;\varepsilon)$ で言い換えただけ。//

定理７ 数列の極限と閉集合



$\mathbb{R}^n \supset M \supset \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ とする。

$\lim_{m\to\infty} x_m = x$ ならば $x \in \bar{M}$

（証明）

背理法で証明する。 $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ かつ $x \notin \bar{M}$ とする。

$$x \notin \bar{M} \Leftrightarrow x \in (\bar{M})^{\mathrm{c}} = (M^{\mathrm{c}})^{\circ} \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0, B(x;\varepsilon_0) \subset M^{\mathrm{c}}$$

ここで定理６より $\exists N \geq 1 (m \geq N \Longrightarrow x_m \in B(x;\varepsilon_0))$ であるが、特に $x_N \in B(x;\varepsilon_0) \subset M^{\mathrm{c}}$。

するとこれは $M \supset \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ に矛盾。//

定理８ 関数の連続性

$\mathbb{R}^n \supset O$ 開集合

$f: M \to \mathbb{R}$ において下記は同値

（１） f が $O \ni a$ において連続

（２） $\lim_{m\to\infty} x_m = a$ なる点列 $O \supset \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を任意にとると $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(a)$

（証明）

（１）⇒（２）

（１）であるとする。ここで $\lim_{m\to\infty} x_m = a$ なる点列 $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ を任意にとり $\forall\varepsilon > 0$ をとる。

$$\exists\delta > 0, \forall y \in M, (\mathrm{d}_n(y, a) < \delta \Longrightarrow \mathrm{d}_1(f(y), f(a)) < \varepsilon)$$

が（１）の仮定により成立しており、上の δ に対し $\lim_{m\to\infty} x_m = a$ だから

$$\exists N \geq 1, m \geq N \Longrightarrow \mathrm{d}_n(x_m, a) < \delta$$

このような N に対し $m \geq N$ ならば $\mathrm{d}_n(x_m, a) < \delta$ であるから $\mathrm{d}_1(f(x_m), f(a)) < \varepsilon$ となる。

したがって $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(a)$ となる。

（２）⇒（１）
対偶を証明する。（１）でないとき（２）でないことを証明する。それぞれを論理記号で書くと次の通り。

（１）　でない：$\exists\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists y\in M,(\mathrm{d}_n(y,a)<\delta\wedge\mathrm{d}_1(f(y),f(a))\geq\varepsilon)$

（２）　でない：$\lim_{m\to\infty}x_m=a$ なる、ある点列 $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{m\to\infty}f(x_m)=f(a)$ が成り立たない

（１）でないとする。
$$\exists\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists y\in M,(\mathrm{d}_n(y,a)<\delta\wedge\mathrm{d}_1(f(y),f(a))\geq\varepsilon)$$
ここで上のような ε をとる。 $\forall k\geq 1$ をとると $1/k>0$ であるから先の命題にしたがって各 k に対し
$$\exists y_k\in M,(\mathrm{d}_n(y_k,a)<1/k\wedge\mathrm{d}_1(f(y_k),f(a))\geq\varepsilon)$$
が成立する。ここで各 k に対し、上のような y_k をとれ、数列 $\{y_k\}_{k\geq1}$ を構成できる。このような $\{y_k\}_{k\geq1}$ をとれば $y_k\to a\ (k\to\infty)$ であって $\mathrm{d}_1(f(y_k),f(a))\geq\varepsilon$ が成立するから（２）でない。以上より示したい事は示された。
※細かいことだが傍線部の理由は選択公理より。
※細かいことだが $y_k\to a\ (k\to\infty)$ であることははさみうちの原理より。

定理９　連続関数における最大値･最小値存在の定理
$\mathbb{R}^n\supset F$ 有界閉集合
$f:F\to\mathbb{R}$ が連続であるとき
$$\exists c_1\in F,\forall x\in F,f(c_1)\geq f(x)$$
$$\exists c_2\in F,\forall x\in F,f(c_2)\leq f(x)$$
（証明）
２行目は１行目と同様に証明できるので１行目を証明する。まず $\exists\sup\{f(x)|x\in F\}$ を証明する。そのために $\{f(x)|x\in F\}$ が上に有界（論理記号で書けば $\exists M>0,\forall x\in F,f(x)\leq M$ ）であることを証明する。背理法で証明するために $\{f(x)|x\in F\}$ が上に有界でないとする。このとき
$$\forall M>0,\exists x\in F,f(x)>M$$
したがって $\forall k\geq 1$ をとると $k>0$ であるから先の命題にしたがって各 k に対し
$$\exists x_k\in F,f(x_k)>k$$
ここで各 k に対し、上のような x_k がとれ、数列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset F$ を構成できる。そして F は有界だから $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列で収束する $\{x_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}\subset F$ がとれて、(1)この収束先を c とすれば F は閉集合だから定理７より $c=\lim_{k\to\infty}x_{n(k)}\in\bar{F}=F$ であって f は連続で定理８により $\mathbb{R}\ni f(c)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n(k)})=\infty$ (2) となり矛盾。よって $\{f(x)|x\in F\}$ は上に有界。そこで $\sup\{f(x)|x\in F\}=$

M とすると $\exists c_1 \in F, f(c_1) = M$ が成立する。実際 M の定義から、$\forall k \geq 1$ をとると各 k に対し

$$\exists y_k \in F, M - 1/k < f(y_k) \leq M$$

ここで各 k に対し、上のような y_k をとれ、数列 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F$ を構成できる。明らかに

$$\mathrm{d}_1(f(y_k), M) < 1/k \longrightarrow 0\ (k \longrightarrow \infty)$$

となるが F が閉集合であるので $\lim_{k\to\infty} y_k \in \bar{F} = F$ であることに注意して f は連続であるから

$$f\left(\lim_{k\to\infty} y_k\right) = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = M$$

以上により $\exists c_1 \in F, \forall x \in F, f(c_1) \geq f(x)$ が成立。//

下線部分の補足

（１）

Bolzano-Weierstrass の収束定理より成り立つ。主張と証明は下記の通り。

主張：$\mathbb{R}^n$ の有界な点列は収束する部分列をもつ。

証明：まず $n = 1$ の場合は次の定理 10 として証明するので成り立つものとして仮定する。次に一般の場合は帰納法で証明する。そこで $n = k\ (k \geq 1)$の場合に主張は成り立つものとする。この仮定の下 $\mathbb{R}^{k+1}$ の有界な点列は収束する部分列をもつことを証明する。 $\mathbb{R}^{k+1}$ の有界な点列 $\mathbb{R}^{k+1} \supset$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \dots, x_{n,k+1}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ を任意にとる。

このとき $\mathbb{R}^k \supset \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\left(x_{n,1}, x_{n,2}, x_{n,3}, \dots, x_{n,k}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^k$ で有界なので収束する部分列をもつ。

したがって $\left\{y_{n(m)}\right\}_{m\in\mathbb{N}} = \left\{\left(x_{n(m),1}, x_{n(m),2}, x_{n(m),3}, \dots, x_{n(m),k}\right)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ が存在し、この部分列がある

$\mathbb{R}^k \ni y = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ に収束する。さて $\mathbb{R}$ の有界な点列 $\mathbb{R} \supset \{z_m\}_{m\in\mathbb{N}} = \left\{x_{n(m),k+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$

をとるとこの数列は有界だから $n = 1$ の場合の本主張を用いて $\left\{z_{m(l)}\right\}_{l\in\mathbb{N}} = \left\{x_{n(m(l)),k+1}\right\}_{l\in\mathbb{N}}$ が存在し、この部分列がある $\mathbb{R} \ni x_{k+1}$ に収束するので $\underline{x_{n(m(l))} \to (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1})\ (l \to \infty)}$。

※下線部の補足

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}_{k+1}\left(x_{n(m(l))}, (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1})\right) \\
&\qquad \leq \mathrm{d}_{k+1}\left(x_{n(m(l))}, \left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{n(m(l)),k+1}\right)\right) \\
&\qquad + \mathrm{d}_{k+1}\left(\left(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{n(m(l)),k+1}\right), (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, x_{k+1})\right) \\
&\qquad = \mathrm{d}_k\left(y_{n(m(l))}, (x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)\right) + \mathrm{d}_1\left(z_{n(m(l))}, x_{k+1}\right) \to 0\ (l \to \infty)
\end{aligned}$$

（なお $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界であるとは $\exists r>0, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset B(0;r)$ が成り立つこと。この定義は $n=1$ のときの有界（上に有界かつ下に有界）の定義の拡張になっている。）

（２）

f は連続で定理８により $f(c)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)})\in\mathbb{R}$ であるが $\{x_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ のとり方により $f(c)+1$ より大きな整数 N （たとえば $[f(c)+1]+1$ ）をとったときに $k\geq N$ とすれば $f(x_{n(k)})>n(k)\geq k\geq N>f(c)+1$ となって $f(x_{n(k)})-f(c)>1$ であるが、これはすなわち $\exists\varepsilon>0, \forall N\geq 1, (n\geq N\wedge \mathrm{d}_1(f(x_{n(k)}), f(c))\geq\varepsilon)$ ということであり $f(c)=\lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)})$ に矛盾。

定理 10　1 次元 Euclid 空間における Bolzano-Werestrass の定理
$\mathbb{R}$ の有界な数列は収束する部分列をもつ。

（証明）
$\mathbb{R}$ の有界な数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ をとる。数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界であるから $\exists\sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}=a$ かつ $\exists\inf\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}=b$ 。そこで $c_0=a, d_0=b$ とする。ここで $[c_0\ d_0]=A_0$ とすると $[c_0\ (c_0+d_0)/2]$ と $[(c_0+d_0)/2\ d_0]$ のどちらか片一方で $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の元を無限に含んでいる。そこで $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の元を無限に含んでいる方を $A_1=[c_1\ d_1]$ とする。次に $[c_1\ (c_1+d_1)/2]$ と $[(c_1+d_1)/2\ d_1]$ のどちらか片一方で $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の元を無限に含んでいる。そこで $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の元を無限に含んでいる方を $A_2=[c_2\ d_2]$ とする。これを繰り返して、帰納的に $A_0=[c_0\ d_0], A_1=[c_1\ d_1], A_2=[c_2\ d_2], \dots, A_n=[c_n\ d_n], \dots$ が定まる。（もし、どこかで定まらないとすると $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が無限（※可算）の元を含んでいることに矛盾する。）さらに定め方により

$$A_0\supset A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots$$

かつ $\forall n\geq 0$ に対し A_n は閉区間で区間縮小法により $\exists c\in\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n$ である。集合列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の定め方に注意して下記のように $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を構成するとこの部分列は c に収束する。（下記を満たす数列を構成できるのは選択公理より。）

$$\exists n(0)\geq 1, x_{n(0)}\in A_0$$
$$\exists n(i)\geq n(i-1), x_{n(i)}\in A_i(\forall i\geq 1)$$

上で構成した部分列 $\{x_{n(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ は c に収束。実際 $1\leq\forall i$ をとると $x_{n(i)}, c\in A_i=[c_i\ d_i]$ であるので $0\leq|x_{n(i)}-c|\leq|c_i-d_i|\longrightarrow|c-c|=0\ (i\longrightarrow\infty)$ となるので $\lim_{i\to\infty}x_{n(i)}=c$ となる。//

補題 11　区間縮小法

$\mathbb{R} \supset \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ として下記を満たしているものとする。

$$c_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n \leq \cdots \leq d_0$$
$$c_0 \leq \cdots \leq d_n \leq \cdots \leq d_2 \leq d_1 \leq d_0$$
$$c_n \leq d_n \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

下記のように閉区間の列を定める。

$$A_0 = [c_0\ d_0], A_1 = [c_1\ d_1], A_2 = [c_2\ d_2], \ldots, A_n = [c_n\ d_n], \ldots$$

このとき、下記が成立。

$$\exists a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

特に $\lim_{n\to\infty}(c_n - d_n) = 0$ の場合は上の a は唯一存在。

（証明）

$\mathbb{R} \supset \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の定め方によりそれぞれ単調増加かつ上に有界、単調減少かつ下に有界である。したがって $\exists \lim_{n\to\infty} c_n$ かつ $\exists \lim_{n\to\infty} d_n$ が成立する。ここで $c_n \leq d_n\ (\forall n \in \mathbb{N})$ であるから $\lim_{n\to\infty} c_n = c, \lim_{n\to\infty} d_n = d$ とすれば $c \leq d$ が成立。また定め方より $\forall n \in \mathbb{N}$ において $c_n \leq c, d \leq d_n$ が成立しているので特に $c_n \leq c \leq d \leq d_n$ が成立。したがって $[c\ d] \subset A_n$ が $\forall n \in \mathbb{N}$ で成立するから

$$[c\ d] \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

また、特に $\lim_{n\to\infty}(c_n - d_n) = 0$ の場合は $c - d = \lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}(c_n - d_n) = 0$ だから $c = d$ である。そこで $c = d = a$ とすれば上記と同じ議論で $\forall n \in \mathbb{N}$ において $c_n \leq a \leq d_n$ が成立しているので $a \in A_n$ が $\forall n \in \mathbb{N}$ で成立するから

$$a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$$

ここで $a = c = \lim_{n\to\infty} c_n = \sup\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ だから $a > b$ なる $\forall b$ をとると $\exists n_1 \in \mathbb{N}, b < c_{n_1} \leq a$ であるので $b \notin A_{n_1}$ であって $b \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ がわかる。同様に $a = d = \lim_{n\to\infty} d_n = \inf\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ だから $a < b$ なる $\forall b$ をとると $\exists n_2 \in \mathbb{N}, a \leq d_2 < b$ であるので $b \notin A_{n_2}$ であって $b \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ がわかる。以上により a 以外は $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ の元になり得ない。//

定理 12　中間値の定理

$\mathbb{R} \supset A$

$f: A \to \mathbb{R}$ が連続かつ $a, b \in A, a < b, f(a) \neq f(b)$ とすると $[f(a)\ f(b)] \subset f([a\ b])$

上で $f(b) < f(a)$ のときは $[f(a)\ f(b)] = [f(b)\ f(a)]$ と読み替える。

特に $[f(a)\ f(b)] \ni 0$ のときは $\exists x \in [a\ b], f(x) = 0$ が成立。

（証明）

$f(a) < f(b)$ のときを証明する。（他方も同様に証明できる。）$[f(a)\ f(b)] \ni \forall y$ をとる。ここで $y = f(a), f(b)$ の場合は $y \in f([a\ b])$ であるので $f(a) < y < f(b)$ の場合を考える。

そこで $c_0 = a, d_0 = b$ とする。ここで $[c_0\ d_0] = A_0$ とする。 $f((c_0 + d_0)/2) = y$ の場合は $y \in f([a\ b])$ となるのでここで証明は終了する。それ以外の場合は下記のように A_1 を定義する。

$f((c_0 + d_0)/2) > y$ の場合は $A_1 = [c_0\ \ (c_0 + d_0)/2]$ とし $f((c_0 + d_0)/2) < y$ の場合は $A_1 = [(c_0 + d_0)/2\ \ d_0]$ とする。さらに $A_1 = [c_1\ d_1]$ とかいて同様の作業を行う。$f((c_1 + d_1)/2) = y$ の場合は $y \in f([a\ b])$ となるのでここで証明は終了する。それ以外の場合は下記のように A_2 を定義する。

$f((c_1 + d_1)/2) > y$ の場合は $A_2 = [c_1\ \ (c_1 + d_1)/2]$ とし $f((c_1 + d_1)/2) < y$ の場合は $A_2 = [(c_1 + d_1)/2\ \ d_1]$ とする。さらに $A_2 = [c_2\ d_2]$ とかいて同様の作業を行う。これを繰り返し続けていくと、帰納的に $A_0 = [c_0\ d_0], A_1 = [c_1\ d_1], A_2 = [c_2\ d_2], \ldots, A_n = [c_n\ d_n], \ldots$ が定まる。有限回の作業で証明が完了しなかった場合を考える。

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

かつ $\forall n \geq 0$ に対し A_n は閉区間で区間縮小法により $\exists c \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ である。また、定め方により

$$|d_{n+1} - c_{n+1}| = (1/2)|d_n - c_n| \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

であるので特に

$$|d_n - c_n| = (1/2)^n |d_0 - c_0| \longrightarrow 0 \ \ (n \longrightarrow \infty)$$

したがって $\lim_{n\to\infty}(c_n - d_n) = 0$ の場合で $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$ の元が唯一なので $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \{c\}$。さらに補題 11 の証明から $c = \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} d_n$ である。$f: (c_0\ d_0) \to \mathbb{R}$ は連続で定理８を用いると

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(c_n)$$
$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(d_n)$$

ところで定め方により $\forall n \in \mathbb{N}$ において $f(c_n) < y < f(d_n)$ であるから

$$y \leq \lim_{n\to\infty} f(d_n) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f(c_n) \leq y$$

であって $f(c) = y$ がわかる。すると $y = f(c) \in f(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n) \subset f(A_0) = f([a\ b])$ となる。以上よりいずれの場合も $y \in f([a\ b])$ となることが証明できたので $[f(a)\ f(b)] \subset f([a\ b])$ がいえた。//

定理 13（距離を使わないで記述できる連続関数の性質）

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 関数とする。

このとき、下記は同値。

（１）f は $\mathbb{R}^n$ で連続

（２）$\mathcal{O}(\mathbb{R}) \ni \forall O, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$

（証明）

（１）⇒（２）

f は $\mathbb{R}^n$ で連続であるとする、このとき f は $\mathbb{R}^n \ni \forall a$ において連続。論理記号で書けば

$$\mathbb{R}^n \ni \forall a, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, (\mathrm{d}_n(y,a) < \delta \Longrightarrow \mathrm{d}_1(f(y), f(a)) < \varepsilon)$$

が成立。以上を同値変形すると

$\mathbb{R}^n \ni \forall a, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, \big(\mathrm{d}_n(y,a) < \delta \Longrightarrow \mathrm{d}_1\big(f(y), f(a)\big) < \varepsilon\big)$

$\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \ni \forall a, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, \big(y \in B_n(a;\delta) \Longrightarrow f(y) \in B_1(f(a);\varepsilon)\big)$

$\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \ni \forall a, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, \Big(y \in B_n(a;\delta) \Longrightarrow y \in f^{-1}\big(B_1(f(a);\varepsilon)\big)\Big)$

$\Leftrightarrow \underline{\mathbb{R}^n \ni \forall a, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, B_n(a;\delta) \subset f^{-1}(B_1(f(a);\varepsilon))}$

となる。(＊)ところで $\mathcal{O}(\mathbb{R}) \ni \forall O$ をとる。ここで $f^{-1}(O) \ni \forall x$ をとると $f(x) \in O \subset O^{\circ}$ だから

$$\exists \varepsilon_0 > 0, B_1(f(x);\varepsilon_0) \subset O$$

逆像をとると $f^{-1}\big(B_1(f(x);\varepsilon_0)\big) \subset f^{-1}(O)$ であるが傍線部(＊)に注意すると

$$\exists \delta_0 > 0, \underline{B_n(x;\delta_0)} \subset f^{-1}\big(B_1(f(x);\varepsilon_0)\big) \subset \underline{f^{-1}(O)}$$

傍線部の包含関係が $f^{-1}(O) \ni \forall x$ に関していえているので $f^{-1}(O) \subset \big(f^{-1}(O)\big)^{\circ}$ となるから

$$f^{-1}(O) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$$

（２）⇒（１）

$\mathcal{O}(\mathbb{R}) \ni \forall O, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ とする。さて $M \ni \forall a, \forall \varepsilon > 0$ をとると $B_1(f(a);\varepsilon) \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ だから $f^{-1}(B_1(f(a);\varepsilon)) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ となる。したがって $\underline{a \in} f^{-1}(B_1(f(a);\varepsilon)) = \underline{\big(f^{-1}(B_1(f(a);\varepsilon))\big)^{\circ}}$ より

$$\exists \delta > 0, B_n(a;\delta) \subset f^{-1}\big(B_1(f(a);\varepsilon)\big)$$

となるので

$$M \ni \forall a, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, B_n(a;\delta) \subset f^{-1}(B_1(f(a);\varepsilon))$$

がいえた。これにより傍線部(＊)の成立がいえたので、（１）の証明の同値変形を逆にたどっていき（１）が成立。

２－１のまとめ

・Euclid 位相の距離について再考し、距離の性質について確認した。
（**正値性**、**対称性**、**三角不等式**）

・Euclid 位相において、各部分集合の**内部・外部・境界**を ε球によって定義した。
内部　→　内点の集合で定義
外部　→　外点の集合で定義
境界　→　境界点の集合で定義
全ての点は内点、外点、境界点のどれかであるから、内部＆外部＆境界で全てを覆い尽くせる。

・Euclid 位相の**開集合**は**「フチ」**のない集合、**閉集合**は**「フチ」**で囲われている集合
数学的には、開集合を ε球を基に定義
開集合　→　内部が元の集合と一致
閉集合　→　内部＆境界が元の集合と一致
開集合の補集合は閉集合
例題１で開球体（ε球）が開集合、閉球体が閉集合であることを確認している。

・開集合系と閉集合系の性質
開集合を集めてきたのが**開集合系**　→　**今後位相を定める定義**とするのでこの性質は重要！
（O1）　$\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$
（O2）　$O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$
（O3）　$\forall\lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ なる $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \supset \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$
閉集合を集めてきたのが**閉集合系**　→　開集合の補集合は閉集合ということから出てくる！
（F1）　$\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$
（F2）　$F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$
（F3）　$\forall\lambda \in \Lambda, F_\lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ なる $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \supset \{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$

・開核作用素と閉包作用素
開核作用素：部分集合に対し、その内部（開核）を対応させる写像
閉包作用素：部分集合に対し、その閉包を対応させる写像

・基底
Euclid 位相の本質は ε球：開集合は ε球の和集合でかける
このように**開集合**は**基底の元の和集合**でかける
したがって、位相を考えるときは全ての開集合について考える必要はなく基底に注目すればよい！

・連続関数の定義を位相的に定義し直した。
解析学では連続関数を $\varepsilon\delta$論法で定義した
→ 距離が定義されていないような位相空間で連続を定義するには…？
→ そこで連続関数をこれまで学習した Euclid 位相の言葉で言い直した（定理 13）
→ さらに距離を使わないで表現する方法に**近傍・近傍系**という概念がある（後節で説明）

・連続であることは数列を使っていいかえることができる。（定理８）
このいいかえによって最小値・最大値存在の定理を証明できる

・最小値・最大値存在の定理
「最小値・最大値存在の定理」について Euclid 位相に限定して証明した
「最小値・最大値存在の定理」の証明は、①関数の定義域が有界であり、Bolzano-Werestrass の定理を使える条件下であることや、②閉集合であることで収束先が定義域に収まることが肝である
「最小値・最大値存在の定理」は**ロルの定理**を証明するときに必要で、ロルの定理を証明できると**平均値の定理**、**テイラーの定理**と続く
一般の位相ではコンパクトな集合に対して「最小値・最大値の存在定理」が成立する（Euclid 位相では有界閉集合はコンパクトと同値であることも後節でわかる）。

・中間値の定理
「中間値の定理」について Euclid 位相に限定して証明した
「中間値の定理」の証明には区間縮小法を用いたが、この証明は Bolzano-Werestrass の定理の証明法と同じく行われた
「中間値の定理」は複雑な方程式に解が存在することを証明するときに使われる（例えば、正弦関数や余弦関数を無限級数で定義したとき、それらが 0 になるような解の範囲を絞ることができる。これによって円周率を定義する流派もある。）
一般の位相では連結な集合に対して「中間値の定理」が成立する（Euculid 位相では閉区間やその直積が連結な集合であることが後節でわかる）。

今後の節に向けて

・位相をさらに一般化して定義したい → (O1)～(O3)を用いて定義（距離を必要としない定義）
一般化した位相では Euclid 位相以外にどのような位相があるのか？
・連続関数を一般化するために距離を用いない形で定義した
定理 13 を用いて新たに連続関数を定義＆近傍、近傍系という概念を用いて改めて考える
・「最小値・最大値の定理」や「中間値の定理」が成立する条件をさらに一般化して考えたい
コンパクト、連結という概念を後節で与える