２－２　一般的な位相空間

位相空間の定義

一般的な位相空間は開集合系（開集合の集合）によって定められる。また、開集合系は１節の定理２で確認した開集合の性質を定義とすることで Euclid 空間から拡張される。

定義１（位相、開集合の定義）

S 空でない集合

$\mathcal{P}(S)$ 集合 S のべき集合（部分集合の集合）

$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{O}$ が S に位相構造を定めるとは下記の条件を満たすこと

（O1） $\emptyset, S \in \mathcal{O}$

（O2） $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

（O3） $\forall\lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}$ なる $\mathcal{O} \supset \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

$\mathcal{O}$ が S に位相構造を定めているとき $(S, \mathcal{O})$ を S の位相空間とよぶ。

※位相空間 $(S, \mathcal{O})$ を単に位相空間 S とかき、その元 a を $a \in S$ とかく。

※開集合系が異なれば台が同じでも異なる位相空間

例

$S = \{p\}$ のとき $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{p\}\} = \{\emptyset, S\}$ のとき $\mathcal{O}_1$ は S に位相構造を定める

例

$S = \{p, q\}$ のとき $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{p, q\}\} = \{\emptyset, S\}$ のとき $\mathcal{O}_1$ は S に位相構造を定める

$S = \{p, q\}$ のとき $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{p\}, \{p, q\}\} = \{\emptyset, \{p\}, S\}$ のとき $\mathcal{O}_2$ は S に位相構造を定める

例

$S = \{p, q, r\}$ のとき $\mathcal{O}_3 = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, \{p, q, r\}\} = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, S\}$ のとき $\mathcal{O}_3$ は S に位相構造を定めない（もし位相を定めるとすると（O3）により $\{p\}, \{q\} \in \mathcal{O}$ から $\{p, q\} = \{p\} \cup \{q\} \in \mathcal{O}$ となり矛盾。）

例

２－１の定理２で確認したことにより $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$ は $\mathbb{R}^n$ の位相空間。これを Euclid 位相と呼ぶ。

（一般には２－１と別の位相を $\mathbb{R}^n$ に定めることができる）

例題１（密着位相と離散位相）

S 空でない集合

（１） $\mathcal{O}_1=\{\emptyset,S\}$ のとき $(S,\mathcal{O}_1)$ は S の位相空間

（２） $\mathcal{O}_2=\mathcal{P}(S)$ のとき $(S,\mathcal{O}_2)$ は S の位相空間

※上記位相はどのような集合 S でも考えられる。（１）の場合を S の密着位相、（２）の場合を S の離散位相といい、極端な位相としてよく出てくる。

（証明）

（１）

（O1）明らか。

（O2）$\mathcal{O}_1\ni O_1,O_2$ をとると、それぞれ $\emptyset$ または S であるのでそれらの共通集合 $O_1\cap O_2$ は $\emptyset$ または S となり $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$。

（O3）$\forall\lambda\in\Lambda,O_\lambda\in\mathcal{O}$ なる $\mathcal{O}\supset\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる。$\Lambda\ni\forall\lambda$ に対し O_λ は $\emptyset$ または S であるのでそれらの和集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ は $\emptyset$ または S となり $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\in\mathcal{O}$。

（２）

（O1）明らか。

（O2）$\mathcal{O}_1\ni O_1,O_2$ をとると、それぞれ S の部分集合でそれらの共通集合 $O_1\cap O_2$ は再び S の部分集合となり $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$。

（O3）$\forall\lambda\in\Lambda,O_\lambda\in\mathcal{O}$ なる $\mathcal{O}\supset\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる。$\Lambda\ni\forall\lambda$ に対し O_λ はそれぞれ S の部分集合でそれらの和集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ は S の部分集合となり $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\in\mathcal{O}$。//

開集合の定義

S 空でない集合

$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{O}$ が S に位相構造を定めているとき $\mathcal{O}$ を開集合系、その元 $\mathcal{O} \ni O$ を開集合とよぶ。

開核の定義とその性質

S 空でない集合

$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{O}$ 位相空間 S の開集合系

$S \supset \forall M$ に対し $M^{\circ} = \bigcup_{\mathcal{O} \ni O, M \supset O} O$ と定め、これを M の開核とよぶ。

例題２（開核の別の表現）

$S \supset \forall M$ に対し M° は M に含まれる最大の開集合。

（証明）

まず $M^{\circ} = \bigcup_{\mathcal{O} \ni O, M \supset O} O \subset M$ は（O3）より開集合。さらに定義により $M \supset \forall O$（開集合）に対し

$$M^{\circ} = \bigcup_{\mathcal{O} \ni O, M \supset O} O \supset O$$

となるので M° は M に含まれる任意の開集合より大きい。//

※上記で $M^{\circ} \subset M$ となるのは M° は $M \supset O$ となる O の和集合だから。

例題３（開核の性質）

$\mathcal{P}(S) \ni \forall M, N$ に対し下記が成立。（２－１の定理４で確認したことと見比べよ。）

(I1) $M \supset N \Rightarrow M^{\circ} \supset N^{\circ}$

(I2) $(M^{\circ})^{\circ} = M^{\circ}$

(I3) M° は M に含まれる最大の開集合

（証明）

(I1)

$M \supset N$ とする。例題２より N° は N に含まれる最大の開集合だが $M \supset N$ より特に M に含まれる開集合であり再び例題２より M° は M に含まれる任意の開集合より大きいから $M^{\circ} \supset N^{\circ}$。

(I2)

まず $\mathcal{O} \ni \forall O, O^{\circ} = O$ が成立。実際 $\mathcal{O} \ni \forall O$ をとれば O に含まれる最大の開集合は O 自身であるのが例題２よりいえて、開核の定義と(I1)より $M^{\circ} = \bigcup_{\mathcal{O} \ni O, M \supset O} O = \underline{\bigcup_{\mathcal{O} \ni O, M^{\circ} \supset O^{\circ}} O = \bigcup_{\mathcal{O} \ni O, M^{\circ} \supset O} O} = (M^{\circ})^{\circ}$。

(I3)

例題２で示した。//

※上記傍線部は $\{O \in \mathcal{O} \mid M^{\circ} \supset O^{\circ}\} = \{O \in \mathcal{O} \mid M^{\circ} \supset O\}$ であることから成立する。

開核作用素の定義とその性質

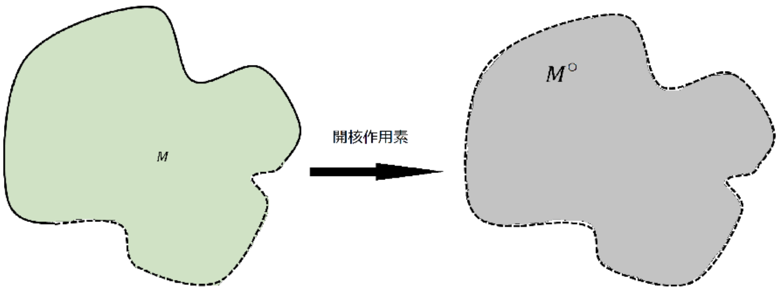
S 空でない集合

$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{O}$ 位相空間 S の開集合系

$S \supset \forall M$ に対し M° を対応させる写像を開核作用素とよぶ。記号でかけば

$$\circ : \mathcal{P}(S) \ni M \mapsto M^\circ \in \mathcal{P}(S)$$

例題４（開核作用素の性質）



$\mathcal{P}(S) \ni \forall M, N$ に対し下記が成立。

(i1) $S^\circ = S$

(i2) $M^\circ \subset M$

(i3) $(M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$

(i4) $(M^\circ)^\circ = M^\circ$

（証明）

(i1)

例題３の(I2)内で $\mathcal{O} \ni \forall O, O^\circ = O$ の成立を確かめた。これと $\mathcal{O} \ni S$ をあわせていえる。

(i2)

例題２で証明した。

(i3)

(i2)を用いて $M \cap N \subset M$ となるので例題３の(I1)を用いて

$$(M \cap N)^\circ \subset M^\circ$$

上と同様にして $(M \cap N)^\circ \subset N^\circ$ が成立するから

$$(M \cap N)^\circ \subset M^\circ \cap N^\circ$$

一方、例題２より $M^\circ, N^\circ \in \mathcal{O}$ であるが（O2）より $M^\circ \cap N^\circ \in \mathcal{O}$ となる。(i2)より $M^\circ \subset M$ と $N^\circ \subset N$ がそれぞれいえて特に $M^\circ \cap N^\circ \subset M \cap N$ なので $M^\circ \cap N^\circ$ は $M \cap N$ に含まれる開集合。例題２を再び用いて $(M \cap N)^\circ$ は $M \cap N$ に含まれる最大の開集合だから

$$(M \cap N)^\circ \supset M^\circ \cap N^\circ$$

以上２つの包含関係から $(M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ$ がいえる。

(i4)

例題３の(I2)で証明した。//

<u>開核作用素から定まる位相</u>

定理２（開核作用素から定まる位相）

S 空でない集合

$$i:\mathcal{P}(S)\ni M\mapsto i(M)\in\mathcal{P}(S)$$

が $\mathcal{P}(S)\ni\forall M,N$ に対し、下記を満たすとき i が開核作用素となるような S の位相が一意に存在。

(i1) $i(S)=S$

(i2) $i(M)\subset M$

(i3) $i(M\cap N)=i(M)\cap i(N)$

(i4) $i(i(M))=i(M)$

（証明）

（一意性）

もし i が開核作用素となるような S の位相が存在するとすれば $i(M)$ が M の内部になるので $M=i(M)$ となる M は開集合で $M\neq i(M)$ となる M は開集合でないので、主張の位相は

$$\mathcal{O}=\{O\in\mathcal{P}(S)|O=i(O)\}$$

以外にはあり得ない。

（存在）

$\mathcal{O}=\{O\in\mathcal{P}(S)|O=i(O)\}$ が位相（開集合系）の条件を満たすことを確かめればよい。

（O1）条件(i1)より $S\in\mathcal{O}$ がいえる。さらに条件(i2)より $i(\emptyset)\subset\emptyset$ だから $i(\emptyset)=\emptyset$ となるので $\emptyset\in\mathcal{O}$ もいえる。実際、もし $i(\emptyset)$ が空でないとすれば元をもつことになり $i(\emptyset)\supset\emptyset$ となり、矛盾。

（O2）$\mathcal{O}\ni O_1,O_2$ をとると $O_1=i(O_1),O_2=i(O_2)$ であるが条件(i3)を用いて

$$i(O_1\cap O_2)=i(O_1)\cap i(O_2)=O_1\cap O_2$$

となるので $O_1\cap O_2\in\mathcal{O}$ がいえる。

（O3）まず $\mathcal{P}(S)\ni\forall M,\forall N,M\supset N\Rightarrow i(M)\supset i(N)$ が示せる。実際 $\mathcal{P}(S)\ni\forall M\supset\forall N$ をとると $M\cap N=N$ だから条件(i3)を用いて $\underline{i(N)}=i(M\cap N)=\underline{i(M)\cap i(N)}$ となるが下線部に注意して $i(M)\supset i(N)$ がいえる。

次に $\forall\lambda\in\Lambda,O_\lambda\in\mathcal{O}$ なる $\mathcal{O}\supset\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとる。$\Lambda\ni\forall\lambda$ に対し $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\supset O_\lambda$ だから先程示したことを用いて $i(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda)\supset i(O_\lambda)$ であって各 λ で和集合を考えると $i(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda)\supset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}i(O_\lambda)$ である。$\forall\lambda\in\Lambda,O_\lambda\in\mathcal{O}$ だから特に $\forall\lambda\in\Lambda,O_\lambda=i(O_\lambda)$ であるから $i(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda)\supset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}i(O_\lambda)\supset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$。さらに条件(i2)より $i(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda)\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$ がいえるから２つの包含関係を合わせて $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda=i(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda)$ となるので $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\in\mathcal{O}$ がいえる。

（定めた位相において開核作用素になること）

$\mathcal{P}(S)\ni\forall M$ に対し $i(M)$ が M に含まれる最大の開集合であることを示す。まず $\mathcal{P}(S)\ni\forall M$ をとる。条件(i4)より $i(M)\in\mathcal{O}$ である。さらに $M\supset\forall O$（開集合）をとると $\mathcal{P}(S)\ni\forall M,\forall N,M\supset N\Rightarrow i(M)\supset i(N)$ であったから $i(M)\supset i(O)=O$ となるので $i(M)$ は M に含まれる最大の開集合//

<u>閉集合の定義とその性質、閉集合系から定まる位相</u>

S 空でない集合

$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{O}$ が S に位相構造を定めているとき $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(S) | F^{c} \in \mathcal{O}\}$ を閉集合系、その元 $\mathcal{F} \ni F$ を閉集合とよぶ。したがって $F^{c} \in \mathcal{O} \Leftrightarrow F \in \mathcal{F}, O \in \mathcal{O} \Leftrightarrow O^{c} \in \mathcal{F}$ がそれぞれ成立。

※以上の事実は２ − １の定理１で確かめたことと対応する。

定理３（閉集合の性質）

$\mathcal{F}$ について下記三式が成立

（F1） $\emptyset, \mathbb{R}^{n} \in \mathcal{F}$

（F2） $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

（F3） $\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \in \mathcal{F}$ なる $\mathcal{F} \supset \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$

（証明）

（F1）（O1）より $\emptyset, S \in \mathcal{O}$ であるから $\emptyset = (\mathbb{R}^{n})^{c} \in \mathcal{F}, \mathbb{R}^{n} = (\emptyset)^{c} \in \mathcal{F}$

（F2） $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ をとると閉集合の定義により ${F_1}^{c}, {F_2}^{c} \in \mathcal{O}$ となるが（O2）とド・モルガンの法則より $(F_1 \cup F_2)^{c} = {F_1}^{c} \cap {F_2}^{c} \in \mathcal{O}$ となるので $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ が成立。

（F3） $\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \in \mathcal{F}$ なる $\mathcal{F} \supset \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとると閉集合の定義により ${F_\lambda}^{c} \in \mathcal{O}$ となるが（O3）ド・モルガンの法則より $(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda)^{c} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} {F_\lambda}^{c} \in \mathcal{O}$ となるので $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$ が成立。//

定理４（閉集合系から定まる位相）

S 空でない集合

$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{F}$ が下記を満たすとき $\mathcal{F}$ が閉集合系となるような S の位相が一意に存在。

（f1） $\emptyset, \mathbb{R}^{n} \in \mathcal{F}$

（f2） $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

（f3） $\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \in \mathcal{F}$ なる $\mathcal{F} \supset \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$

（証明）

（一意性）

もし $\mathcal{F}$ が閉集合系となるような S の位相が存在するとすれば閉集合系の定義により 閉集合系の補集合は全て開集合でなければならない。したがって、主張の位相は

$$\mathcal{O} = \{O \in \mathcal{P}(S) | O^{c} \in \mathcal{F}\}$$

以外には存在しえない。

（存在）

$\mathcal{O} = \{O \in \mathcal{P}(S) | O^{c} \in \mathcal{F}\}$ が位相（開集合系）の条件を満たすことを（f1）～(f3)とド・モルガンの法則により定理３と同様に確かめられる。$\mathcal{F}$ がこの位相の閉集合系となるのは $\mathcal{O}$ の定め方より明らか//

閉包の定義とその性質

S 空でない集合

$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{F}$ 位相空間 S の閉集合系

$S \supset \forall M$ に対し $\bar{M} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}, M\subset F} F$ と定め、これを M の閉包とよぶ。

例題５（閉包の別の表現）

$S \supset \forall M$ に対し $\bar{M}$ は M を含む最小の閉集合。

（証明）

まず $\bar{M} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}, M\subset F} F \supset M$ は（F3）より閉集合。さらに定義により $M \subset \forall F$（閉集合）に対し

$$\bar{M} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}, M\subset F} F \subset F$$

となるので $\bar{M}$ は M を含む任意の閉集合より小さい。//

※上記で $\bar{M} \supset M$ となるのは M° は $M \subset \forall F$ となる F の共通集合だから。

例題６（閉包の性質）

$\mathcal{P}(S) \ni \forall M, N$ に対し下記が成立。（２－１の定理４で確認したことと見比べよ。）

(A1) $M \supset N \Rightarrow \bar{M} \supset \bar{N}$

(A2) $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$

(A3) $\bar{M}$ は M を含む最小の閉集合

（証明）

(A1)

$M \supset N$ とする。例題５より $\bar{M}$ は M を含む最小の閉集合だが $M \supset N$ より特に N を含む閉集合であり再び例題５より $\bar{N}$ は N を含む任意の閉集合より小さいから $\bar{M} \supset \bar{N}$。

(A2)

まず $\mathcal{F} \ni \forall F, \bar{F} = F$ が成立。実際 $\mathcal{F} \ni \forall F$ をとれば F に含まれる最小の開集合は F 自身であるのが例題５よりいえて、閉包の定義と(A1)より $\bar{M} = \bigcap_{F\in\mathcal{F}, M\subset F} F = \bigcap_{F\in\mathcal{F}, \bar{M}\subset \bar{F}} F = \bigcap_{F\in\mathcal{F}, \bar{M}\subset F} F = \bar{\bar{M}}$。

(A3)

例題５で示した。//

※上記傍線部は $\{F \in \mathcal{F} \mid \bar{M} \subset \bar{F}\} = \{F \in \mathcal{F} \mid \bar{M} \subset F\}$ であることから成立する。

補題５（開核と閉包の関係）

$$\mathcal{P}(S) \ni \forall M, \overline{(M^{\mathrm{c}})} = (M^{\circ})^{\mathrm{c}}, (\bar{M})^{\mathrm{c}} = (M^{\mathrm{c}})^{\circ}$$

※以上の事実は２－１（５）触点と触集合(F)で確かめたことと対応する。

（証明）

$\mathcal{P}(S) \ni \forall X$ に対して下記集合を定める。

$$\mathcal{O}_X = \{O \in \mathcal{O} | O \subset X\}$$

$$\mathcal{F}_X = \{F \in \mathcal{F} | F \supset X\}$$

とすると包含関係で順序を入れた場合、例題３や例題６より $\max \mathcal{O}_X = X^{\circ}, \min \mathcal{F}_X = \bar{X}$ が成立。

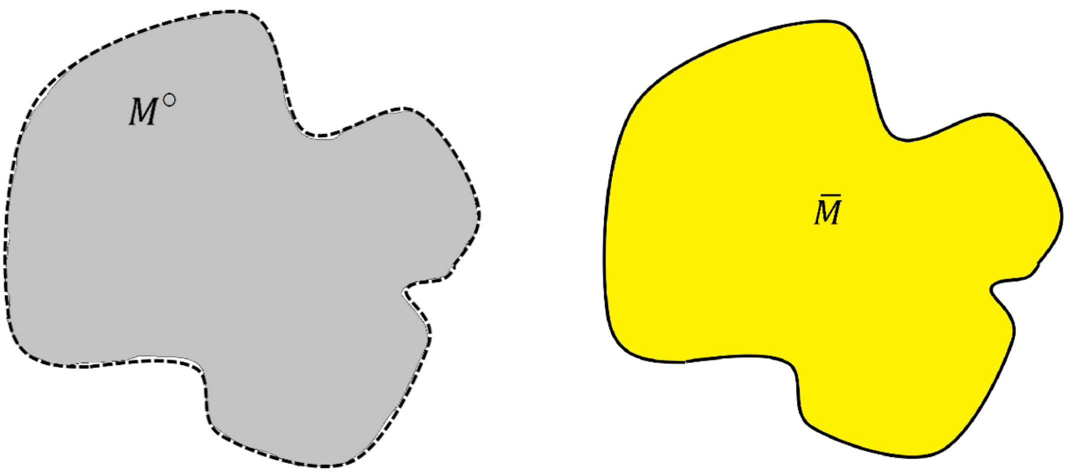
$\overline{(M^{\mathrm{c}})} \in \mathcal{F}, \overline{(M^{\mathrm{c}})} \supset M^{\mathrm{c}}$ だから $\left(\overline{(M^{\mathrm{c}})}\right)^{\mathrm{c}} \in \mathcal{O}, \left(\overline{(M^{\mathrm{c}})}\right)^{\mathrm{c}} \subset (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = M$ がいえるので $\left(\overline{(M^{\mathrm{c}})}\right)^{\mathrm{c}} \in \mathcal{O}_M$ なので $\left(\overline{(M^{\mathrm{c}})}\right)^{\mathrm{c}} \subset \max \mathcal{O}_M = M^{\circ}$。両辺の補集合をとって $\overline{(M^{\mathrm{c}})} \supset (M^{\circ})^{\mathrm{c}}$ がいえる。

$M^{\circ} \in \mathcal{O}, M^{\circ} \subset M$ だから $(M^{\circ})^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}, (M^{\circ})^{\mathrm{c}} \supset M^{\mathrm{c}}$ がいえるので $(M^{\circ})^{\mathrm{c}} \in \mathcal{F}_{M^{\mathrm{c}}}$ なので $(M^{\circ})^{\mathrm{c}} \supset \min \mathcal{F}_{M^{\mathrm{c}}} = \overline{(M^{\mathrm{c}})}$。以上より $\overline{(M^{\mathrm{c}})} \subset (M^{\circ})^{\mathrm{c}}$ がいえる。

２つの包含関係から $\overline{(M^{\mathrm{c}})} = (M^{\circ})^{\mathrm{c}}$ である。さらにこの等号で M を M^{c} に置き換えれば

$$\bar{M} = \overline{((M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}})} = ((M^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}}$$

両辺に補集合をとって $(\bar{M})^{\mathrm{c}} = (M^{\mathrm{c}})^{\circ}$ がいえる。//



閉包作用素の定義とその性質

S 空でない集合

$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{O}$ 位相空間 S の開集合系

$S \supset \forall M$ に対し $\bar{M}$ を対応させる写像を閉包作用素とよぶ。記号でかけば

$$-: \mathcal{P}(S) \ni M \mapsto \bar{M} \in \mathcal{P}(S)$$

例題７（閉包作用素の性質）

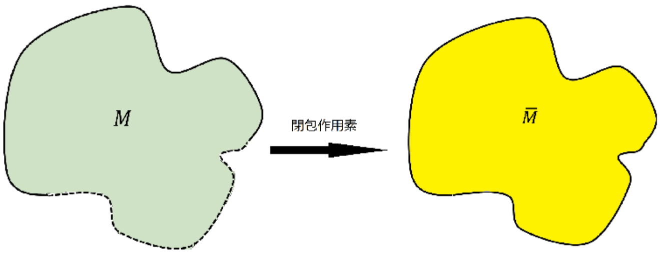
$\mathcal{P}(S) \ni \forall M, N$ に対し下記が成立。

(a1) $\bar{\emptyset} = \emptyset$

(a2) $\bar{M} \supset M$

(a3) $\overline{M \cup N} = \bar{M} \cup \bar{N}$

(a4) $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$



（証明）

補題５の性質を用いて証明する。補題５の M を M^{c} で置き換えた下記式も使う。

$$\mathcal{P}(S) \ni \forall M, \overline{(M^{\mathrm{c}})} = ((M^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}}, (\overline{M^{\mathrm{c}}})^{\mathrm{c}} = M^{\circ}$$

(a1)

$$\bar{\emptyset} = \overline{(S^{\mathrm{c}})} = (S^{\circ})^{\mathrm{c}} = S^{\mathrm{c}} = \emptyset$$

左から３番目の等号は例題４(i1)より。

(a2)

$$\bar{M} = \overline{((M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}})} = ((M^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}} \supset (M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = M$$

左から３番目の等号は例題４(i2)の両辺に補集合をとった関係より。

(a3)

$$\overline{M \cup N} = \overline{(((M \cup N)^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}})} = \overline{((M^{\mathrm{c}} \cap N^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}})} = ((M^{\mathrm{c}} \cap N^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}} = ((M^{\mathrm{c}})^{\circ} \cap (N^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}}$$
$$= ((M^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}} \cup ((M^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}} = \bar{M} \cup \bar{N}$$

左から２番目、５番目の等号はド・モルガンの法則を、左から３番目、６番目の等号は補題５を、左から４番目の等号は例題４(i3)より。

(a4)

$$\bar{\bar{M}} = \overline{\overline{(M^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}}} = \overline{((M^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}}} = (((M^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\circ})^{\mathrm{c}} = ((M^{\mathrm{c}})^{\circ})^{\mathrm{c}} = \bar{M}$$

左から２番目、３番目、５番目の等号は補題５を、左から４番目の等号は例題４(i4)より。//

閉包作用素から定まる位相

定理６（閉包作用素から定まる位相）

S 空でない集合

$$a : \mathcal{P}(S) \ni M \mapsto a(M) \in \mathcal{P}(S)$$

が $\mathcal{P}(S) \ni \forall M, N$ に対し、下記を満たすとき a が閉包作用素となるような S の位相が一意に存在。

(a1) $a(\emptyset) = \emptyset$

(a2) $a(M) \supset M$

(a3) $a(M \cup N) = a(M) \cup a(N)$

(a4) $a(a(M)) = a(M)$

（証明）

（一意性）

もし i が開核作用素となるような S の位相が存在するとすれば $a(M)$ が M の閉包になるので $M = a(M)$ となる M は閉集合で $M \neq a(M)$ となる M は閉集合でないので、主張の位相は閉集合系は

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(S) | F = a(F)\}$$

以外には存在しえない。閉集合系が定まれば、定理４より位相は一意に定まる。

（存在）

$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(S) | F = a(F)\}$ が閉集合系の条件を満たすことを確かめればよい。

（F1）条件(a1)より $\emptyset \in \mathcal{F}$ がいえる。さらに条件(a2)より $a(S) \supset S$ だから $a(S) = S$ となるので $S \in \mathcal{F}$ もいえる。実際 $a(S) \in \mathcal{P}(S)$ であるから $a(S) \subset S$ がいえるため。

（F2）$\mathcal{F} \ni F_1, F_2$ をとると $F_1 = a(F_1), F_2 = a(F_2)$ であるが条件(a3)を用いて

$$a(F_1 \cup F_2) = a(F_1) \cup a(F_2) = F_1 \cup F_2$$

となるので $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ がいえる。

（F3）まず $\mathcal{P}(S) \ni \forall M, \forall N, M \supset N \Rightarrow a(M) \supset a(N)$ が示せる。実際 $\mathcal{P}(S) \ni \forall M \supset \forall N$ をとると $M \cup N = M$ だから条件(a3)を用いて $\underline{a(M)} = a(M \cup N) \underline{= a(M) \cup a(N)}$ となるが下線部に注意して $a(M) \supset a(N)$ がいえる。

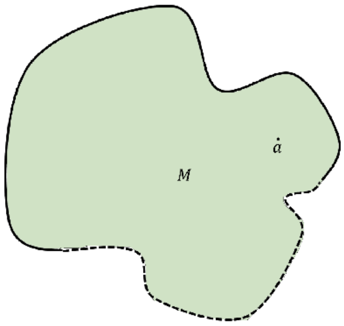
次に $\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \in \mathcal{F}$ なる $\mathcal{F} \supset \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとる。$\Lambda \ni \forall \lambda$ に対し $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \subset F_\lambda$ だから先程示したことを用いて $a(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda) \subset a(F_\lambda)$ であって各 λ で和集合を考えると $a(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a(F_\lambda)$ である。$\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \in \mathcal{F}$ だから特に $\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda = a(F_\lambda)$ であるから $a(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} a(F_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$。さらに条件(a2)より $a(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda) \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ がいえるから２つの包含関係を合わせて $a(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ となるので $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$ がいえる。

（定めた位相において閉包作用素になること）

$\mathcal{P}(S) \ni \forall M$ に対し $a(M)$ が M を含む最小の閉集合であることを示す。まず $\mathcal{P}(S) \ni \forall M$ をとる。条件(a4)より $a(M) \in \mathcal{F}$ である。さらに $M \subset \forall F$（閉集合）をとると $\mathcal{P}(S) \ni \forall M, \forall N, M \supset N \Rightarrow a(M) \supset a(N)$ であったから $F = a(F) \supset a(M)$ となるので $a(M)$ は M を含む最小の閉集合//

内点、触点、外点、境界点、集積点、孤立点

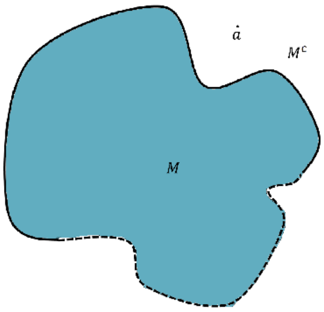
S 空でない集合
$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{O}$ が S に位相構造を定めている
$S \supset M$ 部分集合



a が M の内点

○内部（開核）と内点
M° を M の内部という。
内部の元を内点という。

$$S \ni a \text{ が } M \text{ の内点} \Leftrightarrow a \in M^\circ$$



a が M の外点

○外部と外点
$(M^c)^\circ$ を M の外部という。
外部の元を外点という。

$$S \ni a \text{ が } M \text{ の外点} \Leftrightarrow a \in (M^c)^\circ$$

○境界と境界点
$\bar{M} \setminus M^\circ = \bar{M} \cap (M^\circ)^c = \bar{M} \cap (M^\circ)^c = ((M^c)^\circ)^c \cap (M^\circ)^c = ((M^c)^\circ \cup M^\circ)^c$ を M の境界という。
境界の元を境界点という。

$$S \ni a \text{ が } M \text{ の境界点} \Leftrightarrow a \in \bar{M} \setminus M^\circ$$

○触集合（閉包）と触集合
$\bar{M}$ を M の触集合という。
触集合の元を触点という。

$$S \ni a \text{ が } M \text{ の触点} \Leftrightarrow a \in \bar{M}$$

○集積点と孤立点

$$S \ni a \text{ が } M \text{ の集積点} \Leftrightarrow a \in \overline{M \setminus \{a\}}$$
$$S \ni a \text{ が } M \text{ の孤立点} \Leftrightarrow a \in M \text{ かつ } a \notin \overline{M \setminus \{a\}}$$

例題８（集積点）

（１） $M \not\ni a$ が M の触点 $\Rightarrow S \ni a$ が M の集積点
（２） １次元 Euclid 位相において $A = \{1/n\}_{n \geq 1}$ の集積点として 0 がある

（証明）
（１） $M \not\ni a$ であるとき $a \in \bar{M} = \overline{M \setminus \{a\}}$ となる。
（２） アルキメデスの原理より $\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0, \mathrm{d}(0,1/n) < \varepsilon$ で $\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0, 1/n \in B(0;\varepsilon) \cap A$ から特に $\forall \varepsilon > 0, B(0;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ がいえて $0 \in \bar{A}$。$A \not\ni 0$ で前問より 0 は集積点//

2－2のまとめ

・Euclid 位相の開集合系で成立した事実から、一般の位相へ拡張し各概念を一般化した。

・開集合系と閉集合系

開集合系で成立すること

（O1）　$\emptyset, S \in \mathcal{O}$

（O2）　$O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$

（O3）　$\forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}$　なる　$\mathcal{O} \supset \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$　に対し　$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$

閉集合系で成立すること

（F1）　$\emptyset, S \in \mathcal{F}$

（F2）　$F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Longrightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

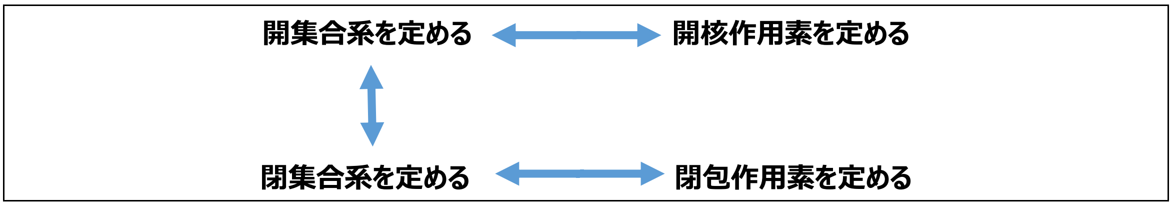
（F3）　$\forall \lambda \in \Lambda, F_\lambda \in \mathcal{F}$　なる　$\mathcal{F} \supset \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$　に対し　$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$

・開核作用素と閉包作用素

開核作用素：部分集合に対し、その内部（開核）を対応させる写像

閉包作用素：部分集合に対し、その閉包を対応させる写像

・定理１～定理６で証明したことはどこから構造を入れてもよいということ



今後の節に向けて

・集合には色々な位相が定義できるのがわかったのでその関係性を調べる

特に密着位相や離散位相と他の位相の関係性を調べ、適切な位相を選択できるように位相の強弱という概念を導入する

・位相を定めるには開集合系を定める以外の方法があることがわかったが、近傍系、基底という新たな概念を用いても位相を定められることを確認する