## ２－３　近傍系と連続写像

### Euclid 空間における近傍及び近傍系

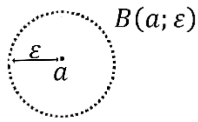
Euclid 空間に近傍の概念を導入する。近傍の概念があることで「近さ」の概念を集合によって記述することができる。これにより最終的には関数または写像の連続についても距離を使用せずに記述することが可能になる。まず、Euclid 空間で導入した近傍にどのような性質があるのかを確認し、それを基に後に一般の位相の近傍を定義する。

以下では暫く断りのない限り、Euclid 位相を考える。
$\mathbb{R}^n \ni a, \varepsilon > 0$ に対し $B(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) < \varepsilon\}$ を中心 $a$ 半径 $\varepsilon$ の $\varepsilon$球とよんだ。
特に連続関数を論じるときなどに $\mathbb{R}^n \ni a, \mathbb{R}^m \ni p$ の $\varepsilon$球を区別したいときは $B_n(a;\varepsilon)$,$B_m(p;\varepsilon)$ など添字をつけることとする。

さて、解析学では $B(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n | \mathrm{d}(x,a) < \varepsilon\}$ を特に $a$ の $\varepsilon$近傍といういい方をしている。ここからわかるように $B(a;\varepsilon)$ は $a$ の近傍の特殊なものである。さらに直後の例題１で確認したように

$$B(a;\varepsilon)^\circ = B(a;\varepsilon) \ni a$$

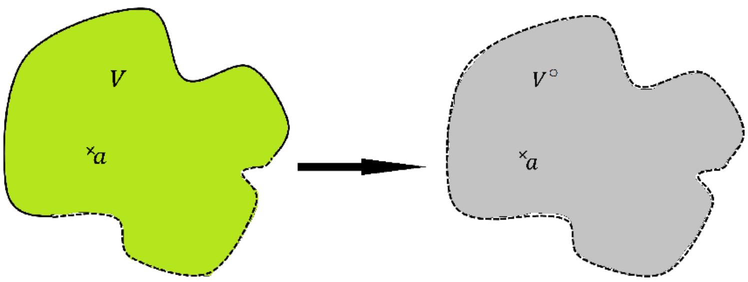
が成立している。改めて $V = B(a;\varepsilon)$ とおけば $V^\circ \ni a$ が成立することになる。




以上を参考にして近傍を下記のように定義する。

$$\mathbb{R}^n \supset V \text{ が } a \text{ の近傍} \Leftrightarrow V^\circ \ni a$$

すると明らかに下記命題が成立。




$\mathbb{R}^n \supset V$ が $a$ の近傍　　　　$V^\circ \ni a$

**定理１（Euclid 空間の近傍の性質）**

$$\mathbb{R}^n \supset V \text{ が } a \text{ の近傍} \Leftrightarrow \exists\varepsilon > 0, B(a;\varepsilon) \subset V \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), a \in O \subset V$$

※特に最右の数式は、一般の位相空間における近傍でも成立することを留意しておく。

（証明）
左から一つ目の同値記号は $a$ が $V^\circ$ の元であるということを右でいいかえたもの。左から２つ目の同値記号を下記のようにそれぞれの矢印で示す。

(⇒)

$\exists\varepsilon>0, B(a;\varepsilon)\subset V$ とする。2－1の例題1で確認したように $B(a;\varepsilon)^{\circ}=B(a;\varepsilon)$ であり $B(a;\varepsilon)\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ をふまえて $O=B(a;\varepsilon)$ をとることで左の命題が成立。

(⇐)

$\exists O\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^n), a\in O\subset V$ とする。ここで $O^{\circ}=O\ni a$ であるので $\exists\varepsilon>0, B(a;\varepsilon)\subset O$ となり $O\subset V$ と合わせて $\exists\varepsilon>0, B(a;\varepsilon)\subset V$ が成立。//

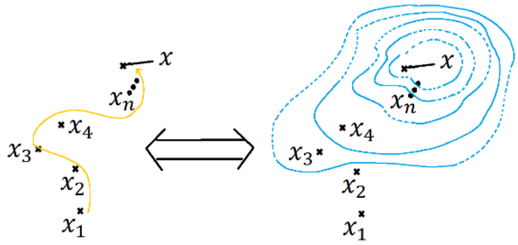
$\mathbb{R}^n\ni\forall x$ に対し $x$ の近傍を集めた集合を $x$ の Euclid 位相における近傍系といい $\mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n)$ で表す。

$$\mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n)=\{V\subset\mathbb{R}^n | V \text{ が } x \text{ の Euclid 位相における近傍}\}$$

**定理2（Euclid 空間における近傍の性質）**

$\mathbb{R}^n\ni x, \{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ とする。

$$\lim_{m\to\infty}x_m=x \Leftrightarrow \forall V\in\mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n), \exists N\geq 1(m\geq N\Longrightarrow x_m\in V)$$




（証明）

(⇒)

$\lim_{m\to\infty}x_m=x$ とする。$\forall V\in\mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n)$ をとると $\exists\varepsilon>0, B(x;\varepsilon)\subset V$ である。ここで2－1の定理6より

$$\exists N\geq 1(m\geq N\Longrightarrow x_m\in B(x;\varepsilon))$$

となる。さて $m\geq N$ とすれば $x_m\in B(x;\varepsilon)\subset V$ であり $x_m\in V$ となる。

(⇐)

$\forall V\in\mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n), \exists N\geq 1(m\geq N\Longrightarrow x_m\in V)$ とする。ここで $\forall\varepsilon>0$ をとる。このとき $x\in B(x;\varepsilon)=\left(B(x;\varepsilon)\right)^{\circ}$ であるから $B(x;\varepsilon)\in\mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n)$ となる。すると仮定により

$$\exists N\geq 1\left(m\geq N\Longrightarrow x_m\in B(x;\varepsilon)\right)$$

が成立し $\forall\varepsilon>0, \exists N\geq 1(m\geq N\Longrightarrow \mathrm{d}(x_m\ x)<\varepsilon)$ がいえるので、$\lim_{m\to\infty}x_m=x$ となる。//

**定理3（距離を使わないで記述できる連続関数の性質）**

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 関数とすると、下記は同値。

（1）$f$ は $\mathbb{R}^n$ で連続

（2）$\mathbb{R}^n\ni\forall x, \mathcal{V}_{f(x)}(\mathbb{R})\ni\forall V, f^{-1}(V)\in\mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n)$

（証明）

（1）⇒（2）

2－1の定理13より（1）$f$ は $\mathbb{R}^n$ で連続であることは下記命題と同値である。

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}) \ni \forall O, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$$

以上から上記命題が成立しているとき（２）が成立することを示す。 $\mathcal{O}(\mathbb{R}) \ni \forall O, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ とする。$\mathbb{R}^n \ni \forall x$ をとる。さらに $\mathcal{V}_{f(x)}(\mathbb{R}) \ni \forall V$ とすれば

$$\exists O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), f(x) \in O \subset V$$

すると $x \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(V)$ となり $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ であるから $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n)$ となる。

（２）⇒（１）

２－１で確認したように（１）は $\mathbb{R}^n \ni \forall x$ において連続であることと同値。したがって（２）を仮定して $\mathbb{R}^n \ni \forall x$ において連続であることを示す。まず $\mathbb{R}^n \ni \forall x, \mathcal{V}_{f(x)}(\mathbb{R}) \ni \forall V, f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n)$ とする。ここで $\mathbb{R}^n \ni \forall x$ をとる。次に $\forall \varepsilon > 0$ をとる。このとき $B_1(f(x);\varepsilon) \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ かつ $f(x) \in B_1(f(x);\varepsilon)$ であるから特に $B_1(f(x);\varepsilon) \in \mathcal{V}_{f(x)}(\mathbb{R})$ で仮定により $f^{-1}(B_1(f(x);\varepsilon)) \in \mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n)$ である。すると

$$\exists O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n), x \in O \subset f^{-1}(B_1(f(x);\varepsilon))$$

ここで $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ であるから $x \in O = O^\circ$ であって $\exists \delta > 0, B_n(x;\delta) \subset O \subset f^{-1}(B_1(f(x);\varepsilon))$ が成立。このような $\delta$ に対して $\mathrm{d}_n(y,x) < \delta$ なる $y$ を任意にとれば

$$y \in B_n(x;\delta) \subset f^{-1}(B_1(f(x);\varepsilon))$$

より $f(y) \in B_1(f(x);\varepsilon)$ となって $\mathrm{d}_1(f(y),f(x)) < \varepsilon$ となる。以上から（２）の仮定の下で

$$\mathbb{R}^n \ni \forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n (\mathrm{d}_n(y,x) < \delta \Rightarrow \mathrm{d}_1(f(y),f(x)) < \varepsilon)$$

がいえる。これは $\mathbb{R}^n \ni \forall x$ において連続であることである。//

**系４（距離を使わないで記述できる連続関数の性質）**

$\mathbb{R}^n \ni x$ とする。

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 関数とする。

このとき、下記は同値。

（１）$f$ は $\mathbb{R}^n \ni x$ で連続

（２）$\mathcal{V}_{f(x)}(\mathbb{R}) \ni \forall V, f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x(\mathbb{R}^n)$

※一般の位相では関数の１点における連続性を定義するとき、上記の性質を用いる。

（証明）

２－１で確認したように（１）は $\mathbb{R}^n \ni \forall x$ において連続であることと同値で、系４の主張は定理３の主張を１点における連続性にいいかえたもの。

※定理３及び系４は２－１定理 13 を経由して証明したが、より直接的には定理 13 の証明内の

$\mathbb{R}^n \ni \forall a, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, \left(\mathrm{d}_n(y,a) < \delta \Longrightarrow \mathrm{d}_1\left(f(y),f(a)\right) < \varepsilon\right)$

$\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \ni \forall a, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, B_n(a;\delta) \subset f^{-1}(B_1(f(a);\varepsilon))$

の同値関係に注意すればよい。すなわち、１点における連続性というのが

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, B_n(a;\delta) \subset f^{-1}(B_1(f(a);\varepsilon))$$

であることと同値であり、そこから系４がいえて、定理３が証明できる。

**一般位相空間における近傍及び近傍系**

先ほど、Euclid 空間において距離を使わずに記述できる性質があることを確認した。これらの記述を用いて一般位相空間における近傍及び近傍系を定義する。さて、本稿では開集合系から位相を定義しているものの、２－２では閉集合系や開核作用素、閉包作用素からも位相を定めることができることを確かめた。同様にして、近傍系を定めることでそれに対応する位相を定めることができることを確認する。

$S$ 空でない集合
$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{O}$ が $S$ に位相構造を定めているとき

$$S \supset V \text{ が } x \text{ の近傍} \Leftrightarrow x \in V^{\circ} \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O}, x \in O \subset V$$

特に $\mathcal{O} \ni V \ni x$ である場合は特に $V$ を $x$ の開近傍という。
※定理１で確認した性質と見比べよ。
※２つめの同値記号は $V^{\circ}$ が $V$ に含まれる最小の開集合であることから成立。

さらに $S \ni \forall x$ に対し $x$ の近傍を集めた集合を $x$ の近傍系といい $\mathcal{V}_x$ で表す。

$$\mathcal{V}_x = \{V \subset \mathbb{R}^n | V \text{ が } x \text{ の近傍}\}$$

なお $\mathcal{V}_x \ni S$ が成立するので特に $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$ が成立。

**定理５（近傍を使った開集合の特徴づけ）**

$S \supset O$ 空でない集合

$$\mathcal{O} \ni O \Leftrightarrow O \ni \forall x, O \in \mathcal{V}_x$$

（証明）

（⇒）

$\mathcal{O} \ni O$ とする。まず $O \ni \forall x$ をとると $O^{\circ} = O \ni \forall x$ の包含関係から $O \in \mathcal{V}_x$ が成立。

（⇐）

$O \ni \forall x, O \in \mathcal{V}_x$ とする。$O \subset O^{\circ}$ を示すために $O \ni \forall x$ をとる。すると $O \in \mathcal{V}_x$ であるから上の定義により $O^{\circ} \ni x$ であるから $O \subset O^{\circ}$ となる。//

**定理６（近傍系の性質）**

$S \ni \forall x$ に対し $\mathcal{V}_x$ を $x$ の近傍系とすると、以下が成立。

(V1) $\mathcal{V}_x \ni \forall V, x \in V$

(V2) $\mathcal{V}_x \ni V_1, V_1 \subset V_2 \Rightarrow \mathcal{V}_x \ni V_2$

(V3) $\mathcal{V}_x \ni V_1, V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$

(V4) $\mathcal{V}_x \ni \forall V, \exists W \in \mathcal{V}_x, W \ni \forall y, V \in \mathcal{V}_y$

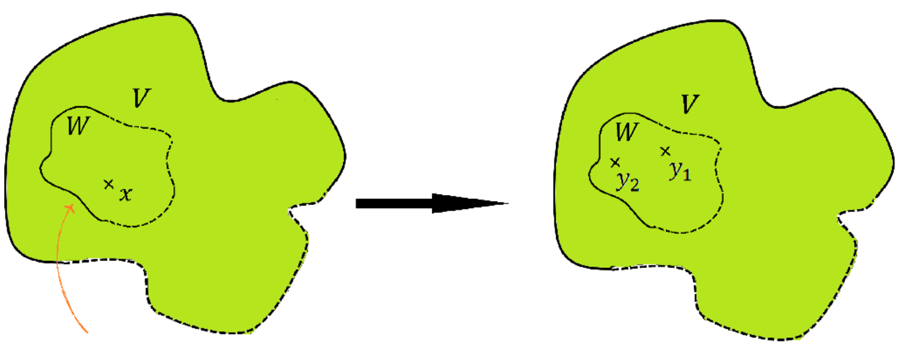
（証明）

(V1) $\mathcal{V}_x \ni \forall V$ をとると $x \in V^{\circ}$ だから $V^{\circ} \subset V$ と合わせて $x \in V$ となる。

(V2) $\mathcal{V}_x \ni V_1, V_1 \subset V_2$ とすると $x \in {V_1}^{\circ}$ かつ 開核作用素の性質から ${V_1}^{\circ} \subset {V_2}^{\circ}$ なのでこれらを合わせて $x \in {V_2}^{\circ}$ となるので $\mathcal{V}_x \ni V_2$ が成立。

(V3) $\mathcal{V}_x \ni V_1, V_2$ とすると $x \in {V_1}^{\circ}$ かつ $x \in {V_2}^{\circ}$ であるが開核作用素の性質により $x \in {V_1}^{\circ} \cap {V_2}^{\circ} = (V_1 \cap V_2)^{\circ}$ となるので $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$ が成立。

(V4) $\mathcal{V}_x \ni \forall V$ をとる。ここで $W = V^{\circ} \ni x$ とすれば $\mathcal{V}_x \ni W$ であって $W \ni \forall y$ をとると $y \in W = V^{\circ}$ であるので $V \in \mathcal{V}_y$ となる。//




たとえば $W$ として $V^{\circ}$ がとれる　　（V4）の条件

## 近傍系から定まる位相

**定理７（近傍系から定まる位相）**

$S$ 空でない集合

$S \ni \forall x$ に対し $\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ が定まっていて、下記を満たすとき $\forall x$ に対して $\mathcal{V}(x)$ が近傍系となるような $S$ の位相が一意に存在。

(V1) $\mathcal{V}(x) \ni \forall V, x \in V$

(V2) $\mathcal{V}(x) \ni V_1, V_1 \subset V_2 \Rightarrow \mathcal{V}(x) \ni V_2$

(V3) $\mathcal{V}(x) \ni V_1, V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$

(V4) $\mathcal{V}(x) \ni \forall V, \exists W \in \mathcal{V}(x), W \ni \forall y, V \in \mathcal{V}(y)$

（証明）

（一意性）

もし $\forall x$ に対して $\mathcal{V}(x)$ が近傍系となるような $S$ の位相が存在するとすれば定理４で示した事実により $O \ni \forall x, O \in \mathcal{V}(x)$ となる $O$ は全て開集合かつ、その条件が成り立たない集合は全て開集合ではない集合でなければならない。したがって、主張の位相の開集合系は

$$\mathcal{O} = \{O \in \mathcal{P}(S) | O \ni \forall x, O \in \mathcal{V}(x)\}$$

以外には存在しえない。

（存在）

$\mathcal{O} = \{O \in \mathcal{P}(S) | O \ni \forall x, O \in \mathcal{V}(x)\}$ が開集合系の条件を満たすことを確かめればよい。

（O1）空集合には元が存在しないため、空集合から元をとるような命題は常に成立。よって $\emptyset \in \mathcal{O}$ が成立。$S \ni \forall x$ をとる。$\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ より $x \in \exists V \in \mathcal{V}(x)$ であるが(V2)より $V \subset S$ に注意して $\mathcal{V}(x) \ni S$ となる。以上から $S \in \mathcal{O}$ がいえる。

（O2）$\mathcal{O} \ni O_1, O_2$ をとる。$O_1 \cap O_2 \ni \forall x$ をとる。このとき $O_1 \ni x$ かつ $O_2 \ni x$ となるので特に $O_1 \in \mathcal{V}(x)$ かつ $O_2 \in \mathcal{V}(x)$ であるが、(V3)より $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{V}(x)$ となるので $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ がいえる。

（O3）$\forall \lambda \in \Lambda, O_\lambda \in \mathcal{O}$ なる $\mathcal{O} \supset \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとる。$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \ni \forall x$ をとる。$\exists \lambda_0 \in \Lambda, O_{\lambda_0} \ni x$ となるが $\mathcal{O}$ の定め方により $O_{\lambda_0} \in \mathcal{V}(x)$ であってさらに $O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ であり、(V1)より $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{V}(x)$ となるので $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$ が成立。

（定めた位相において $\mathcal{V}(x)$ が近傍系になること）

$S \ni \forall x$ に対し $\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{V}_x$ を $x$ の近傍系として $\mathcal{V}(x) = \mathcal{V}_x$ を示す。まず $\mathcal{V}_x \ni \forall V$ をとる。このとき $x \in V^\circ$ であるが $V^\circ \in \mathcal{O}$ であるので $\mathcal{O}$ の定め方により $V^\circ \in \mathcal{V}(x)$ である。ここで(V2)の条件から $V \in \mathcal{V}(x)$ となり $\mathcal{V}(x) \supset \mathcal{V}_x$ が成立。次に $\mathcal{V}(x) \ni \forall V$ をとる。さらに $O = \{y \in S | V \in \mathcal{V}(y)\}$ とおくと $V \supset O \ni x$ かつ $O \in \mathcal{O}$ となる。実際に前者は $O \ni \forall y$ をとると $V \in \mathcal{V}(y)$ であるので(V1)より $y \in V$ が成り立ち $V \supset O$ が成立。また、後者は $O \ni \forall y$ をとると $V \in \mathcal{V}(y)$ であるが(V4)より $\exists W \in \mathcal{V}(y), W \ni \forall z, V \in \mathcal{V}(z)$ となる。このような $W$ に対して $W \ni \forall z, V \in \mathcal{V}(z)$ であるから $W \subset O$ となるが $W \in \mathcal{V}(y)$ と合わせて $O \in \mathcal{V}(y)$ となる。すると $O \ni \forall y, O \in \mathcal{V}(y)$ がいえるから $O \in \mathcal{O}$ となる。以上より $V \supset O \ni x$ かつ $O \in \mathcal{O}$ がいえたので $V \in \mathcal{V}_x$ がいえて $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{V}_x$ が成立。//

## 一般位相における連続写像

２－１で Euclid 位相における連続関数について再確認し、距離を用いずに記述できる性質について述べた。また、本節では新たに近傍という概念を導入し、Euclid 位相における連続関数や関数の１点における連続性を定理３や系４にて近傍の概念を用いて記述した。これらの事実から連続関数の概念を一般位相へと拡張する。まず、１点における連続を近傍で定義し、集合上で連続であることを開集合で定義する。そして、これらの関連性について調べる。Euclid 位相で確認したように集合上の任意の点で連続であることが集合で連続であることと同値であることが予想できる。

**定義８（連続写像）**

$S_1, S_2$ 空でない集合

$\mathcal{P}(S_1) \supset \mathcal{O}_1, \mathcal{P}(S_2) \supset \mathcal{O}_2$ が $S_1, S_2$ にそれぞれ位相構造を定めている

$f: S_1 \longrightarrow S_2$ が連続とは $\mathcal{O}_2 \ni \forall O, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1$ が成立すること

※上記は Euclid 位相で成立した２－１の定理 13 を一般の連続写像に拡張したものである。

**定義９（写像の１点における連続）**

$S_1, S_2$ 空でない集合

$S_1 \ni x$

$\mathcal{P}(S_1) \supset \mathcal{O}_1, \mathcal{P}(S_2) \supset \mathcal{O}_2$ が $S_1, S_2$ にそれぞれ位相構造を定めている

$S_1 \ni \forall x$ に対し $\mathcal{V}_x(S_1)$ は $x$ における近傍系

$S_2 \ni \forall y$ に対し $\mathcal{V}_y(S_2)$ は $y$ における近傍系

$f: S_1 \longrightarrow S_2$ が $S_1 \ni x$ で連続とは $\mathcal{V}_{f(x)}(S_2) \ni \forall V, f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x(S_1)$ が成立すること

※上記は Euclid 位相で成立した系４を一般の連続写像に拡張したものである。

**定理 10（連続写像と１点における連続の関連性）**

$S_1, S_2$ 空でない集合

$\mathcal{P}(S_1) \supset \mathcal{O}_1, \mathcal{P}(S_2) \supset \mathcal{O}_2$ が $S_1, S_2$ にそれぞれ位相構造を定めている

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 位相空間 $S_1, S_2$ それぞれの閉集合系

$S_1 \ni \forall x$ に対し $\mathcal{V}_x(S_1)$ は $x$ における近傍系

$S_2 \ni \forall y$ に対し $\mathcal{V}_y(S_2)$ は $y$ における近傍系

以上を前提として $f: S_1 \longrightarrow S_2$ が連続であることは下記と同値

（１） $\mathcal{O}_2 \ni \forall O, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1$

（２） $\mathcal{F}_2 \ni \forall F, f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_1$

（３） $S_1 \ni \forall x, \mathcal{V}_{f(x)}(S_2) \ni \forall V, f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x(S_1)$

※（１）⇔（３）は集合上で連続であることは集合の各１点について連続であることと同値であることを示している。

（証明）

（１）⇔（２）

（⇒）（１）が成立するとする。$\mathcal{F}_2 \ni \forall F$ をとれば $S_2 \setminus F \in \mathcal{O}_2$ となって $S_1 \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(S_2 \setminus F) \in \mathcal{O}_1$ だから $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_1$ が成立。

（⇐）（２）が成立するとする。$\mathcal{O}_2 \ni \forall O$ をとれば $S_2 \setminus O \in \mathcal{F}_2$ となって $S_1 \setminus f^{-1}(O) = f^{-1}(S_2 \setminus O) \in \mathcal{F}_1$ だから $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1$ が成立。

（１）⇔（３）

（⇒）（１）が成立するとする。$S_1 \ni \forall x$ をとる。$\mathcal{V}_{f(x)}(S_2) \ni \forall V$ をとる。このとき、近傍の定義から

$$f(x) \in V^\circ \in \mathcal{O}_2$$

（１）より $f^{-1}(V^\circ) \in \mathcal{O}_1$ であり $x \in f^{-1}(V^\circ) \subset f^{-1}(V)$ となり $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x(S_1)$ が成立。

（⇐）（３）が成立するとする。$\mathcal{O}_2 \ni \forall O$ をとる。$f^{-1}(O) \ni \forall x$ をとる。このとき $\mathcal{O}_2 \ni \forall O$ だから $O^\circ = O \ni f(x)$ が成立しているので $O \in \mathcal{V}_{f(x)}(S_2)$ であって（３）より $f^{-1}(O) \in \mathcal{V}_x(S_1)$ である。ここで $x$ は任意にとったから定理５により $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1$ が成立。//

**例題 11（連続写像の例）**

$S_1, S_2$ 空でない集合

$\mathcal{P}(S_1) \supset \mathcal{O}_1, \mathcal{P}(S_2) \supset \mathcal{O}_2$ が $S_1, S_2$ にそれぞれ位相構造を定めている

$f: S_1 \longrightarrow S_2$ 写像

（１） $\mathcal{O}_1 = \mathcal{P}(S_1)$ であるとき $f$ は連続

（２） $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, S_2\}$ であるとき $f$ は連続

（３） $S_1 \ni \forall x, f(x) = y_0$ であるとき $f$ は連続

（４） $\mathcal{O}_1 \supset \mathcal{O}_2, S_1 \ni \forall x, f(x) = x$ であるとき $f$ は連続

（証明）

（１） $\mathcal{O}_2 \ni \forall O, f^{-1}(O) \in \mathcal{P}(S_1) = \mathcal{O}_1$ となるので $f$ は連続

（２） $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{P}(S_1)$ かつ $f^{-1}(S_2) = S_1 \in \mathcal{P}(S_1)$ となるので $f$ は連続

（３） $\mathcal{O}_2 \ni \forall O$ をとる。$O \ni y_0$ である場合は $f^{-1}(O) = S_1 \in \mathcal{O}_1$ であり $O \not\ni y_0$ である場合は $f^{-1}(O) = \emptyset \in \mathcal{O}_1$ となるので $f$ は連続

（４） $\mathcal{O}_2 \ni \forall O$ をとる。$f^{-1}(O) = O \in \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ となるので $f$ は連続//

**開写像、閉写像**

$S_1, S_2$ 空でない集合
$\mathcal{P}(S_1) \supset \mathcal{O}_1, \mathcal{P}(S_2) \supset \mathcal{O}_2$ が $S_1, S_2$ にそれぞれ位相構造を定めている
$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 位相空間 $S_1, S_2$ のそれぞれの閉集合系
$f: S_1 \longrightarrow S_2$ 写像

$$f \text{ が 開写像} \Leftrightarrow \mathcal{O}_1 \ni \forall O, f(O) \in \mathcal{O}_2$$
$$f \text{ が 閉写像} \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \ni \forall F, f(F) \in \mathcal{F}_2$$

**定理 12（全単射の写像の逆写像の連続性）**
$f: S_1 \longrightarrow S_2$ 写像が全単射であるとき

$$f^{-1} \text{ が連続} \Leftrightarrow f \text{ が 開写像} \Leftrightarrow f \text{ が 閉写像}$$

（証明）
$f: S_1 \longrightarrow S_2$ 写像が全単射であるとき $\underline{(f^{-1})^{-1} = f}$ が成立する。したがって

$$f^{-1} \text{ が連続} \Leftrightarrow \mathcal{O}_1 \ni \forall O, (f^{-1})^{-1}(O) \in \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow \mathcal{O}_1 \ni \forall O, f(O) \in \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow f \text{ が 開写像}$$
$$f^{-1} \text{ が連続} \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \ni \forall F, (f^{-1})^{-1}(F) \in \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow \mathcal{F}_1 \ni \forall F, f(F) \in \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow f \text{ が 閉写像}$$

がそれぞれ成立。//

※下線部について
$S_1 \ni \forall x$ に対して $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ を示せばよい。$S_1 \ni \forall x$ をとる。$f(x) = y$ とすると $f^{-1}(y) = x$ が成立する。一方 $(f^{-1})^{-1}(x) = z$ とすると $f^{-1}(z) = x$ である。$f$ は全単射であるから $f^{-1}$ は全単射特に単射であるから $f^{-1}(z) = x = f^{-1}(y)$ から $(f^{-1})^{-1}(x) = z = y = f(x)$ となる。//

**例題 13（開写像及び閉写像の例）**

$S_1,S_2$ 空でない集合

$\mathcal{P}(S_1)\supset\mathcal{O}_1,\mathcal{P}(S_2)\supset\mathcal{O}_2$ が $S_1,S_2$ にそれぞれ位相構造を定めている

$f:S_1\longrightarrow S_2$ 写像

（１） $\mathcal{O}_2=\mathcal{P}(S_2)$ であるとき $f$ は開写像及び閉写像

（２） $S_1=S_2=S,\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2,S=S_1\ni\forall x,f(x)=x$ であるとき $f$ は開写像及び閉写像

（３） $S_2=\mathbb{R}^n,S_1\ni\forall x,f(x)=y_0$ であるとき $f$ は閉写像であるが開写像でない

（証明）

（１） $\mathcal{O}_2=\mathcal{P}(S_2)=\mathcal{F}_2$ (＊1) となるので $\mathcal{O}_1\ni\forall O,f(O)\in\mathcal{P}(S_2)=\mathcal{O}_2,\mathcal{F}_1\ni\forall F,f(F)=F\in\mathcal{P}(S_2)=\mathcal{F}_2$ となる。

（２） $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$ から $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2$ (＊2) もいえるので $\mathcal{O}_1\ni\forall O,f(O)=O\in\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2,\mathcal{F}_1\ni\forall F,f(F)=F\in\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2$ となる。

（３） $\mathcal{P}(S_2)\ni\{y_0\}$ は閉集合であるかつ開集合でない。(＊3) $\mathcal{F}_1\ni\forall F$ をとると $F=\emptyset$ である場合は $f(\emptyset)=\emptyset\in\mathcal{F}_2$ となり $F\neq\emptyset$ である場合には $f(F)=\{y_0\}\in\mathcal{F}_2$ となるので $f$ は閉写像。一方で $\mathcal{O}_1\ni S_1$ だが $f(S_1)=\{y_0\}\notin\mathcal{O}_2$ となるので $f$ は開写像でない。

※各傍線部について

（＊1）

$\mathcal{O}_2=\mathcal{P}(S_2)$ であるとする。$\mathcal{P}(S_2)\ni\forall F$ をとると $S_2\setminus F\in\mathcal{P}(S_2)=\mathcal{O}_2$ だから $F\in\mathcal{F}_2$ となるので $\mathcal{P}(S_2)\subset\mathcal{F}_2$ となるので $\mathcal{P}(S_2)=\mathcal{F}_2$ が成立。

（＊2）

$\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$ であるとする。$\mathcal{F}_1\ni\forall F$ をとると $S_2\setminus F=S\setminus F=S_1\setminus F\in\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$ だから $F\in\mathcal{F}_2$ となるので $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2$ が成立。

（＊3）

$O=\mathbb{R}^n\setminus\{y_0\}$ として $O\ni\forall a$ をとる。すると $\mathrm{d}(a,y_0)>0$ であり $y_0\notin B(a;\mathrm{d}(a,y_0))\subset O$ となるので $a\in O^\circ$ が成立。$O\subset O^\circ$ となるから $\mathbb{R}^n\setminus\{y_0\}=O\in\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ であり $\{y_0\}\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ となる。一方で $A=\{y_0\}$ とすると $A^\circ=\emptyset\neq A$ となり $A=\{y_0\}$ は開集合でない。実際 $\forall\varepsilon>0$ をとる。このとき $b_\varepsilon=y_0+(\varepsilon/2)(1,0,0,\ldots,0)\in B(y_0;\varepsilon)\cap A^c$ となるので $B(y_0;\varepsilon)\cap A^c\neq\emptyset$ となる。以上より

$$\forall\varepsilon>0,B(y_0;\varepsilon)\cap A^c\neq\emptyset$$

これを否定記号でいいかえると

$$\neg(\exists\varepsilon>0,B(y_0;\varepsilon)\cap A^c=\emptyset)$$

であるが、これをさらに集合の包含関係でいいかえると

$$\neg(\exists\varepsilon>0,B(y_0;\varepsilon)\subset A)$$

が成立。これはつまり $\neg(y_0\in A^\circ)$ である、つまり $y_0\notin A^\circ\subset A=\{y_0\}$ であるので $A^\circ=\emptyset$ が成立。

**定理 14（連続写像及び開写像の合成写像）**

$S_1, S_2, S_3$ 空でない集合

$\mathcal{P}(S_1) \supset \mathcal{O}_1, \mathcal{P}(S_2) \supset \mathcal{O}_2, \mathcal{P}(S_3) \supset \mathcal{O}_3$ が $S_1, S_2, S_3$ にそれぞれ位相構造を定めている

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ 位相空間 $S_1, S_2, S_3$ それぞれの閉集合系

$f: S_1 \longrightarrow S_2$ 写像

$g: S_2 \longrightarrow S_3$ 写像

（１） $f, g$ が共に連続の場合、その合成写像 $g \circ f$ は連続

（２） $f, g$ が共に開写像の場合、その合成写像 $g \circ f$ は開写像

（３） $f, g$ が共に閉写像の場合、その合成写像 $g \circ f$ は閉写像

（証明）

（１）

$f, g$ が共に連続とする。$g$ が連続であるので $\mathcal{O}_3 \ni \forall O, g^{-1}(O) \in \mathcal{O}_2$ であり、さらに $f$ が連続であるので $(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}\left(g^{-1}(O)\right) \in \mathcal{O}_1$ となるので $g \circ f$ は連続

（２）

$f, g$ が共に開写像とする。$f$ が開写像であるので $\mathcal{O}_1 \ni \forall O, f(O) \in \mathcal{O}_2$ であり、さらに $g$ が開写像であるので $(g \circ f)(O) = g(f(O)) \in \mathcal{O}_3$ となるので $g \circ f$ は開写像

（３）

$f, g$ が共に閉写像とする。$f$ が閉写像であるので $\mathcal{F}_1 \ni \forall F, f(F) \in \mathcal{F}_2$ であり、さらに $g$ が閉写像であるので $(g \circ f)(F) = g(f(F)) \in \mathcal{F}_3$ となるので $g \circ f$ は閉写像//

## 同相写像

$S_1, S_2$ 空でない集合
$\mathcal{P}(S_1) \supset \mathcal{O}_1, \mathcal{P}(S_2) \supset \mathcal{O}_2$ が $S_1, S_2$ にそれぞれ位相構造を定めている
$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 位相空間 $S_1, S_2$ それぞれの閉集合系

$$f: S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が同相写像} \Leftrightarrow f: S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が全単射かつ } f, f^{-1} \text{がそれぞれ連続}$$

$$\text{位相空間 } S_1, S_2 \text{ が同相} \Leftrightarrow \exists f: S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が同相写像}$$

位相空間 $S_1, S_2$ が同相であることを $S_1 \approx S_2$ で表す。また、定理 12 で確認したことから

$$f: S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が 同相写像} \Leftrightarrow f: S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が全単射かつ } f \text{ が連続かつ開写像}$$

$$f: S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が 同相写像} \Leftrightarrow f: S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が全単射かつ } f \text{ が連続かつ閉写像}$$

となることに注意する。

**定理 15（同相は同値関係）**
位相空間 $S_1, S_2$ が同相であることを $S_1 \approx S_2$ で表すとき、2 項関係 $\approx$ は同値関係になる。

（証明）
（反射律）
同じ位相構造が入っている位相空間 $S$ に対して恒等写像 $I: S \longrightarrow S$ を考える。このとき $I$ は全単射かつ連続（例題 11（4））かつ開写像（例題 13（２））、特に同相写像となるので $S \approx S$
（対称律）
位相空間 $S_1, S_2$ が $S_1 \approx S_2$ を満たしているとする。このとき $\exists f: S_1 \longrightarrow S_2$ 同相写像となる。特に $f$ は全単射かつ連続かつ $f^{-1}$ が連続である。$f$ は全単射であるから $f^{-1}$ も全単射であるので $f^{-1}: S_2 \longrightarrow S_1$ は全単射かつ連続で逆写像の $f$ は連続であり $f^{-1}$ は同相写像となって $S_2 \approx S_1$
（推移律）
位相空間 $S_1, S_2, S_3$ が $S_1 \approx S_2, S_2 \approx S_3$ を満たしているとする。このとき

$$\exists f: S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 同相写像}$$

$$\exists g: S_2 \longrightarrow S_3 \text{ 同相写像}$$

ここで $f, g$ 共に全単射かつ連続かつ開写像となる。すると定理 14（１）及び（２）から合成写像 $g \circ f: S_1 \longrightarrow S_3$ は全単射（逆写像は $f^{-1} \circ g^{-1}$ である）かつ連続かつ開写像となる。特に同相写像となるから $S_1 \approx S_3$//
（※）上記証明の（反射律）の部分については同じ位相空間 $S$ である必要がある。台の集合が同じであっても位相構造（開集合系）が異なる場合には別の位相空間として扱う必要がある。

**定理 16（同相と同値の命題）**
$S_1 \ni \forall x$ に対し $\mathcal{V}_x(S_1)$ は $x$ における近傍系
$S_2 \ni \forall y$ に対し $\mathcal{V}_y(S_2)$ は $y$ における近傍系

写像 $f: S_1 \longrightarrow S_2$ が全単射であるとき、下記条件はそれぞれ同値である。
（０） $f: S_1 \longrightarrow S_2$ が同相写像
（１） $O \in \mathcal{O}_1 \Leftrightarrow f(O) \in \mathcal{O}_2$ が成立する
（２） $F \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow f(F) \in \mathcal{F}_2$ が成立する
（３） $S_1 \ni \forall x, V \in \mathcal{V}_x(S_1) \Leftrightarrow f(V) \in \mathcal{V}_{f(x)}(S_2)$ が成立する
（４） $f(M^\circ) = \left(f(M)\right)^\circ$ が成立する
（５） $f(\bar{M}) = \overline{(f(M))}$ が成立する

（証明）
○（０）⇔（１）
（０）が成立するとする。写像 $f$ が全単射かつ連続かつ開写像であるから
$$f^{-1}\left(f(O)\right) = O \in \mathcal{O}_1 \Leftrightarrow f(O) \in \mathcal{O}_2$$
（１）が成立するとする。写像 $f$ が全単射なので $\mathcal{O}_1 \ni \forall O$ をとると（１）の仮定より $f(O) \in \mathcal{O}_2$ となるから $f$ は開写像。さらに写像 $f$ が全単射であることに注意して $\mathcal{O}_2 \ni \forall K = f\left(f^{-1}(K)\right)$ をとると（１）の仮定により $f^{-1}(K) \in \mathcal{O}_1$ が成立し $f$ は連続。以上により $f$ は同相写像。
○（１）⇔（２）
（１）が成立するとする。写像 $f$ が全単射であるから
$$F \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow S_1 \setminus F \in \mathcal{O}_1 \Leftrightarrow S_2 \setminus f(F) = f(S_1 \setminus F) \in \mathcal{O}_2 \Leftrightarrow f(F) \in \mathcal{F}_2$$
（２）が成立するとする。写像 $f$ が全単射であるから
$$O \in \mathcal{O}_1 \Leftrightarrow S_1 \setminus O \in \mathcal{F}_1 \Leftrightarrow S_2 \setminus f(O) = f(S_1 \setminus O) \in \mathcal{F}_2 \Leftrightarrow f(O) \in \mathcal{O}_2$$
○（１）⇐（３）
（３）が成立するとする。
$$O \in \mathcal{O}_1 \Leftrightarrow O \ni \forall x, O \in \mathcal{V}_x(S_1) \Leftrightarrow O \ni \forall x, f(O) \in \mathcal{V}_{f(x)}(S_2) \Leftrightarrow f(O) \ni \forall y, f(O) \in \mathcal{V}_y(S_2)$$
$$\Leftrightarrow f(O) \in \mathcal{O}_2$$
左から２つ目の同値は（３）の成立を仮定したことによるもの。
○（１）⇔（４）
（１）が成立するとする。定義により $M^\circ = \bigcup_{O \subset M, O \in \mathcal{O}_1} O$ であって写像 $f$ が全単射であるから
$$f(M^\circ) = f\left(\bigcup_{O \subset M, O \in \mathcal{O}_1} O\right) = \bigcup_{O \subset M, O \in \mathcal{O}_1} f(O) = \bigcup_{K \subset f(M), K \in \mathcal{O}_2} K = \left(f(M)\right)^\circ$$
左から３つ目の等号は $F_f: \{O \in \mathcal{O}_1 | O \subset M\} \to \{K \in \mathcal{O}_2 | K \subset f(M)\}$ を $F_f(O) = f(O)$ と定めると、これが全単射となること、つまり $\{K \in \mathcal{O}_2 | K \subset f(M)\} = F_f(\{O \in \mathcal{O}_1 | O \subset M\}) = \{f(O) | O \in \mathcal{O}_1, O \subset M\}$ から成り立つ。

（４）が成立するとする。$O \in \mathcal{O}_1$ とすると $O = O^\circ$ となるので $f(O) = f(O^\circ) = (f(O))^\circ$ であるから $O \in \mathcal{O}_1 \Rightarrow f(O) \in \mathcal{O}_2$ は成立。一方で $f(O) \in \mathcal{O}_2$ とすると（４）の仮定より $f(O) = \left(f(O)\right)^\circ = f(O^\circ)$ となる。写像 $f$ は単射であるから $O = O^\circ$ となるので $O \in \mathcal{O}_1$ となる。以上より $O \in \mathcal{O}_1 \Leftarrow f(O) \in \mathcal{O}_2$ もいえた。

○（４）⇒（３）

（４）が成立するとする。$S_1 \ni \forall x$ をとると（４）の仮定により

$$V \in \mathcal{V}_x(S_1) \Leftrightarrow x \in V^\circ \Leftrightarrow f(x) \in f(V^\circ) = \left(f(V)\right)^\circ \Leftrightarrow f(V) \in \mathcal{V}_{f(x)}(S_2)$$

左から２つ目の等号は写像 $f$ が単射となることから成立。

○（２）⇔（５）

（１）⇔（４）と同様に示せる。//

※上記証明で使った事実を証明する。

▼写像 $f: S_1 \longrightarrow S_2$ が全単射かつ $S_1 \supset A$ であるとき $f(S_1 \setminus A) = S_2 \setminus f(A)$

（証明）

$f(S_1 \setminus A) \ni \forall y$ をとると $\exists x \in S_1 \setminus A, f(x) = y$ であり $y = f(x) \in S_2 \setminus f(A)$ となる。実際 $y \in f(A)$ とすると $\exists z \in A, f(z) = y$ になるので $f(z) = y = f(x)$ となるが $f$ は単射なので $A \ni z = x \in S_1 \setminus A$ となり、矛盾。よって $f(S_1 \setminus A) \subset S_2 \setminus f(A)$ である。次に $S_2 \setminus f(A) \ni \forall y$ をとると $f$ が全射なので $f(S_1) = S_2 \supset S_2 \setminus f(A) \ni y$ であるから $\exists x \in S_1, f(x) = y$ となる。さらに $x \notin A$ である。実際 $x \in A$ とすると $y = f(x) \in f(A)$ となってしまい矛盾。したがって $y = f(x) \in f(S_1 \setminus A)$ であるから $f(S_1 \setminus A) \supset S_2 \setminus f(A)$ である。以上により $f(S_1 \setminus A) = S_2 \setminus f(A)$ となる。

▼$O \ni \forall x, f(O) \in \mathcal{V}_{f(x)}(S_2) \Leftrightarrow f(O) \ni \forall y, f(O) \in \mathcal{V}_y(S_2)$

（証明）

（⇒）$f(O) \ni \forall y$ をとると $\exists x \in O, f(x) = y$ で $f(O) \in \mathcal{V}_{f(x)}(S_2) = \mathcal{V}_y(S_2)$

（⇐）$O \ni \forall x$ をとると $f(O) \ni f(x)$ となるので右の仮定により $f(O) \in \mathcal{V}_y(S_2)$

▼写像 $f: S_1 \longrightarrow S_2$ が全単射かつ $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ であるとき $f(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(O_\lambda)$

（証明）

包含関係をそれぞれ示せばよい。

▼$F_f: \{O \in \mathcal{O}_1 | O \subset M\} \to \{K \in \mathcal{O}_2 | K \subset f(M)\}$ を $F_f(O) = f(O)$ と定めると、これが全単射

（証明）

$f(M) \supset \forall K \in \mathcal{O}_2$ をとると $f$ は全単射であったから $\mathcal{P}(S_2) \ni N = f^{-1}(K)$ をとれば $K = f(N)$ となる。ここで $f$ は全射であるために $K \subset f(M)$ から $N = f^{-1}(K) \subset f^{-1}\left(f(M)\right) = M$ が成立する。さらに（１）の仮定を用いることで $K = f(N) \in \mathcal{O}_2$ から $N \in \mathcal{O}_1$ を導ける。これにより $N \in \{O \in \mathcal{O}_1 | O \subset M\}$ と $F_f(N) = K$ がいえるので $F$ は全射。次に $F_f(K) = F_f(L)$ とする。このとき $f(K) = f(L)$ である。$K \ni \forall x$ をとると $f(x) \in f(K) = f(L)$ となるので $\exists y \in L, f(y) = f(x)$ であるが $f$ は単射であるので $x = y \in L$ がいえるので $K \subset L$ である。同様に逆の包含関係もいえて $K = L$ となるので $F_f$ は単射となる。

## ２－３のまとめ

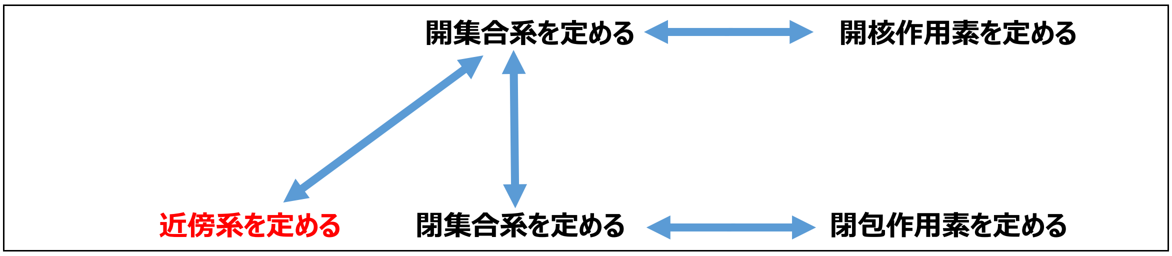
（近傍について）

・Euclid 位相における近傍系に関しての事実を整理し、近傍の概念を一般の位相へと拡張した。
近傍とは $\varepsilon$近傍の概念から拡張したもの
点列の収束は近傍を用いて記述することで、距離を使わずに記述することができた（定理２）

・一般位相における近傍の定義

$$S \supset V \text{ が } x \text{ の近傍} \Leftrightarrow x \in V^{\circ} \Leftrightarrow \exists O \in \mathcal{O}, x \in O \subset V$$

・近傍系の性質を確認し、どこから構造を入れてもよいということを定理７で証明した




・連続写像の定義

$f\colon S_1 \longrightarrow S_2$ が連続とは $\mathcal{O}_2 \ni \forall O, f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1$ が成立すること

・写像が１点において連続であることの定義

$f\colon S_1 \longrightarrow S_2$ が $S_1 \ni x$ で連続とは $\mathcal{V}_{f(x)}(S_2) \ni \forall V, f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_x(S_1)$ が成立すること

・ある集合の任意の点で連続であることとその集合上で連続であることは同値である（定理 10）

・同相写像の定義とその性質

$$f\colon S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が同相写像} \Leftrightarrow f\colon S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が全単射かつ } f, f^{-1} \text{がそれぞれ連続}$$

$$\text{位相空間 } S_1, S_2 \text{ が同相} \Leftrightarrow \exists f\colon S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が同相写像}$$

さらに連続写像、開写像、閉写像が全単射である時の性質から

$$f\colon S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が 同相写像} \Leftrightarrow f\colon S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が全単射かつ } f \text{ が連続かつ開写像}$$

$$f\colon S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が 同相写像} \Leftrightarrow f\colon S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が全単射かつ } f \text{ が連続かつ閉写像}$$

・位相空間が同相であることの定義

$$\text{位相空間 } S_1, S_2 \text{ が同相} \Leftrightarrow \exists f\colon S_1 \longrightarrow S_2 \text{ 写像が同相写像}$$

また、２つの位相空間が同相であることは同値関係になる（定理 15）

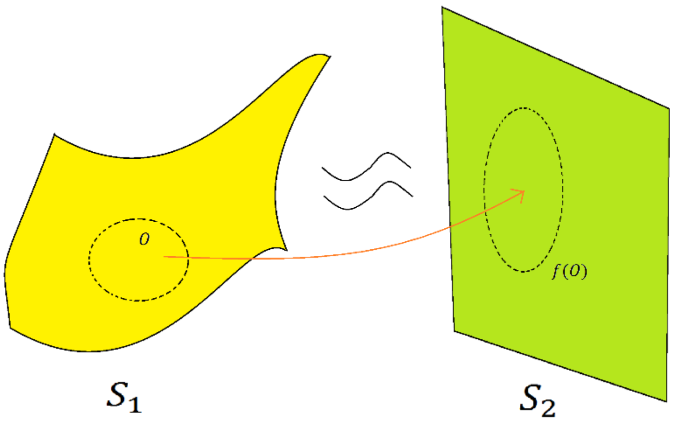
（同相写像に関する参考）

定理 16 の証明の補足として $f: S_1 \longrightarrow S_2$ が全単射かつ（１）が成立しているとき $F_f: \{O \in \mathcal{O}_1 | O \subset M\} \to \{K \in \mathcal{O}_2 | K \subset f(M)\}$ を $F_f(O) = f(O)$ と定めると、これが全単射であることを証明した。特に $M = S_1, K = f(S_1) = S_2$ の場合も変わらず $F_f$ は全単射であり $\mathcal{O}_2 = \{K \in \mathcal{O}_2 | K \subset S_2\} = F_f(\{O \in \mathcal{O}_1 | O \subset S_1\}) = F_f(\mathcal{O}_1)$ であることがわかる。逆に $\mathcal{O}_2 = F_f(\mathcal{O}_1)$ であれば $f: S_1 \longrightarrow S_2$ が全単射であるから直ちに（１）が成立するから $F_f$ が全単射であることと $f$ が同相であることは同値である。ここから定理 16 で確認したことと併せてイメージ的には次のことがいえる。

・$S_1 \approx S_2$ であることは $S_1$ の開集合系と $S_2$ の開集合系が全単射写像で結べる、つまり「同じ数」だけ開集合が存在して、それぞれ「対応する開集合」が存在することといいかえられる

・$S_1 \approx S_2$ であることは $S_1$ の閉集合系と $S_2$ の閉集合系が全単射写像で結べる、つまり「同じ数」だけ開集合が存在して、それぞれ「対応する閉集合」が存在することといいかえられる

・$f: S_1 \to S_2$ が同相であることは $S_1 \ni x$ の近傍系と $S_2 \ni f(x)$ の近傍系が全単射写像で結べる、つまり「同じ数」だけ近傍が存在して、それぞれ「対応する近傍」が存在することといいかえられる




**今後の節に向けて**

・集合には色々な位相が定義できるのがわかったのでその関係性を調べる

特に密着位相や離散位相と他の位相の関係性を調べ、適切な位相を選択できるように位相の強弱という概念を導入する

その関係性を調べる中で基底及び基本近傍系の概念を新たに導入し、一般の位相の性質を調べるためにそれらが有用であることを見る