２－４　位相の強弱と生成

位相の強弱

本節では台が同じ集合である位相空間について、「どのような関係性があるのか」「特定の開集合を含んだ位相空間を考えることができるのか」を確認する。特に台が同じ集合である位相空間を比較するときは、位相の強弱（開集合がどれだけ多く含まれているのか）を見る場合は多い。この強弱によって位相の順序関係を考えることで、上限・下限の位相を考えることができる。

定理１（位相の強弱）

S 空でない集合
$\mathcal{P}(S) \supset \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ が S にそれぞれ位相構造を定めている
$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ 位相空間 $(S, \mathcal{O}_1), (S, \mathcal{O}_2)$ それぞれの閉集合系
$S \ni \forall x$ に対し $\mathcal{V}_x(S, \mathcal{O}_1)$ は x における $(S, \mathcal{O}_1)$ の近傍系
$S \ni \forall y$ に対し $\mathcal{V}_y(S, \mathcal{O}_2)$ は y における $(S, \mathcal{O}_2)$ の近傍系
このとき、以下は同値
（１） $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$
（２） $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$
（３） $S \ni \forall x$ に対し $\mathcal{V}_x(S, \mathcal{O}_1) \subset \mathcal{V}_x(S, \mathcal{O}_2)$

（証明）
$i: (S, \mathcal{O}_2) \to (S, \mathcal{O}_1)$ を $i(x) = x$ となるように定める。（恒等写像）すると（１）～（３）は i が連続となることと同値。//

定理１の（１）～（３）のどれかが成立するとき「 $\mathcal{O}_1$ は $\mathcal{O}_2$ より弱い位相」または「 $\mathcal{O}_2$ は $\mathcal{O}_1$ より強い位相」といって $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ であらわす。つまり、２つの位相を比較した時に開集合が多い方を強い位相とよぶ。さて、次の例から直ちにわかるように、この順序関係は常にどちらかの順序がつくわけではない。

例題２（位相の順序関係）

同じ集合が台である２つの位相空間に関して、「強弱が必ず定まる」とは限らないことを示せ。

（証明）

$S=\{1,2\}$ に対し $\mathcal{O}_1=\{\emptyset,\{1\},S\},\mathcal{O}_2=\{\emptyset,\{2\},S\}$ を考えると $(S,\mathcal{O}_1),(S,\mathcal{O}_2)$ は位相空間になる。（（O１）～（O３）を確かめよ。この証明は読者に任せる。）ところが $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2,\mathcal{O}_2\subset\mathcal{O}_1$ のどちらも成立しない。（互いに自身は含まない集合を他方が含んでいる。）//

また、明らかではあるが、条件を課さなければ密着位相が最弱位相、離散位相が最強位相となる。

例題３（密着位相・離散位相）

同じ集合が台である２つの位相空間に関して、密着位相が最弱位相、離散位相が最強位相。

（証明）

S を空でない集合とし $\mathcal{P}(S)\supset\forall\mathcal{O}$ が S に位相構造を定めているとする。（O1）の条件により

$$\emptyset,S\in\mathcal{O}$$

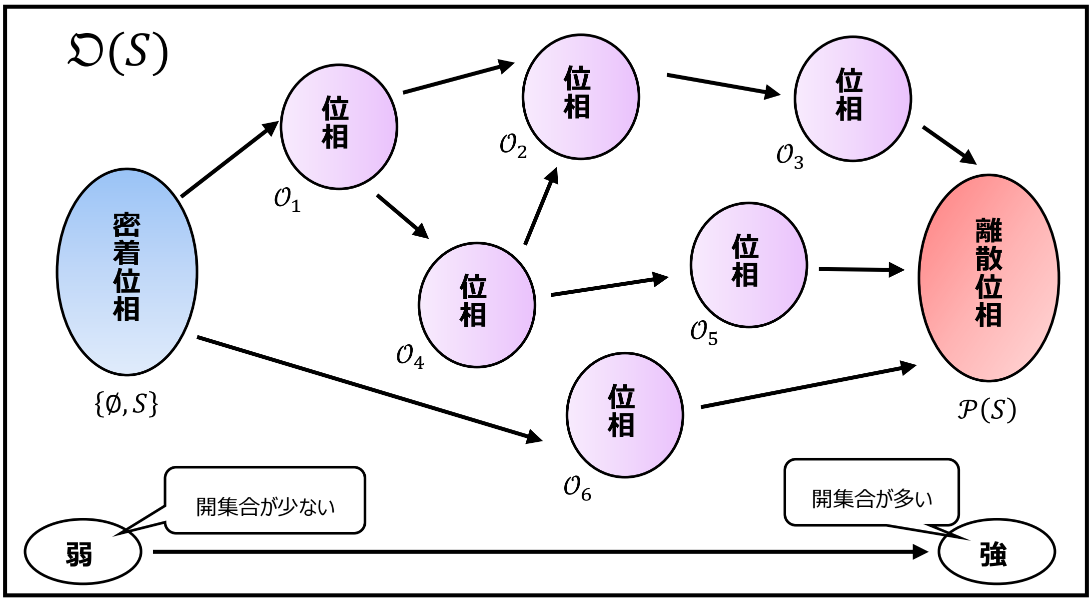
であるから $\{\emptyset,S\}\leq\mathcal{O}$ となるので密着位相は最弱位相。さらに

$$\mathcal{P}(S)\supset\mathcal{O}$$

であるから $\mathcal{P}(S)\geq\mathcal{O}$ となるので離散位相は最強位相。//

次に特定の条件下での下限位相・上限位相を考える。記述を簡単にするために下記のように開集合系を集めた集合を考える。（この記法は汎用的ではないことに注意する。）

$$\mathfrak{O}(S)=\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))|(S,\mathcal{O})\text{が位相空間となる}\}$$



位相における下限

定理４（位相における下限）

S 空でない集合

$\mathfrak{O}(S) \supset \mathfrak{A} = \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ある開集合系の集合

このとき $(S, \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda)$ が位相空間になる、つまり $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \in \mathfrak{O}(S)$

さらに $\mathfrak{O}(S) \supset \mathfrak{I}(\mathfrak{A}) = \{\mathcal{O} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)) | (S,\mathcal{O})\text{が位相空間かつ}\ \Lambda \ni \forall\lambda, \mathcal{O}_\lambda \geq \mathcal{O}\}$ とすると $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ は $\mathfrak{I}(\mathfrak{A})$ の元かつ $\mathfrak{I}(\mathfrak{A})$ の中で最強の位相。

※証明で明らかになるが $\mathfrak{I}(\mathfrak{A}) = \{\mathcal{O} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)) | (S,\mathcal{O})\text{が位相空間かつ}\ \mathcal{O} \geq \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda\}$ となることに注意。

（証明）

まず $(S, \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda)$ が位相空間になることを示すために（O1）～（O3）の成立を確認する。

（O1）$\Lambda \ni \forall\lambda$ をとると $(S, \mathcal{O}_\lambda)$ は位相空間になるので $\mathcal{O}_\lambda \ni \emptyset, S$ である。したがって $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \ni \emptyset, S$ となる。

（O2）$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \ni O_1, O_2$ を任意にとる。すると $\Lambda \ni \forall\lambda$ をとると $\mathcal{O}_\lambda \ni O_1, O_2$ が成立。ところで $(S, \mathcal{O}_\lambda)$ は位相空間になるので $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_\lambda$ となる。λ は任意にとったので $O_1 \cap O_2 \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ が成立。

（O3）$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \supset \{O_\mu\}_{\mu\in\mathrm{M}}$ を任意にとる。すると $\Lambda \ni \forall\lambda$ をとると $\mathcal{O}_\lambda \supset \{O_\mu\}_{\mu\in\mathrm{M}}$ が成立。ところで $(S, \mathcal{O}_\lambda)$ は位相空間になるので $\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}} O_\mu \in \mathcal{O}_\lambda$ となる。λ は任意にとったので $\bigcup_{\mu\in\mathrm{M}} O_\mu \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ が成立。

以上により $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \in \mathfrak{O}(S)$ がいえた。

さて $\Lambda \ni \forall\lambda$ をとると $\mathcal{O}_\lambda \supset \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ が成立する。特に $\mathcal{O}_\lambda \geq \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ であるから $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \in \mathfrak{I}(\mathfrak{A})$ となる。さらに $\mathfrak{I}(\mathfrak{A}) \ni \forall\mathcal{O}$ をとると $\Lambda \ni \forall\lambda$ をとったときに $\mathcal{O}_\lambda \supset \mathcal{O}$ が成立。以上から $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \supset \mathcal{O}$ が成立するので特に $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \geq \mathcal{O}$ となる。したがって $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ は $\mathfrak{I}(\mathfrak{A})$ の中で最強位相。//

定理４の主張をまとめると下記のようになる。

・$\mathfrak{I}(\mathfrak{A}) \ni \forall\mathcal{O}, \Lambda \ni \forall\lambda, \mathcal{O}_\lambda \geq \mathcal{O}$

・$\mathfrak{I}(\mathfrak{A}) \ni \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$

・$\mathfrak{I}(\mathfrak{A}) \ni \forall\mathcal{O}, \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \geq \mathcal{O}$

以上において位相の強弱に関する順序関係において $\mathfrak{I}(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ の下界、さらに $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ は $\mathfrak{A}$ の下限ということがいえる。以上を踏まえ、今後は

$$\inf\mathfrak{A} = \inf_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$$

とかくことを約束する。

位相における上限

さて、先ほどと同様にして位相における上限について考える。先程は下限を考える時に共通集合を用いたので、上限を考える時には和集合を用いればよいのではないかと予測できる。しかし、和集合そのものではそもそも位相にならない可能性がある。

例題５（位相の和集合は位相にならない）
S 空でない集合
$\mathfrak{O}(S) \supset \mathfrak{A} = \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ある開集合系の集合
このとき $(S, \bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda)$ が位相空間にならない例を示せ。

（証明）
$S = \{1,2,3\}, \mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{1\}, S\}, \mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{2\}, S\}$ とすると $(S, \mathcal{O}_1)$ 及び $(S, \mathcal{O}_2)$ は位相空間になる。（（O1）～（O3）が成立することを確かめればよいが、ここでは省略。）しかし $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, S\}$ とすると $(S, \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$ は位相になり得ない。実際 $\{1\}, \{2\} \in \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ にもかかわらず $\{1,2\} = \{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2$ となるから。//

例題５にて上限は、下限の場合に対応して単に「和集合をとる」だけではできないことを確認できた。そこで、下限を用いて上限を表現する、という手法をとる。

定理６（位相における上限）
S 空でない集合
$\mathfrak{O}(S) \supset \mathfrak{A} = \{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ある開集合系の集合
$\mathfrak{O}(S) \supset \mathfrak{S}(\mathfrak{A}) = \{\mathcal{O} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)) | (S, \mathcal{O})$が位相空間かつ $\Lambda \ni \forall\lambda, \mathcal{O}_\lambda \leq \mathcal{O}\}$
ここで $(S, \inf\mathfrak{S}(\mathfrak{A}))$ が位相空間になることは定理４で確かめた、つまり $\inf\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{O}(S)$
さらに $\inf\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ の元かつ $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ の中で最弱の位相。
※証明で明らかになることだが $\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) = \{\mathcal{O} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)) | (S, \mathcal{O})$が位相空間かつ $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda \leq \mathcal{O}\}$ となることに注意。つまり $\inf\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ は $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ を含む最弱の位相になっている。

（証明）
$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) = \{\mathcal{O}_\mu\}_{\mu\in\mathrm{M}}$ とすると $\Lambda \ni \forall\lambda, \mathrm{M} \ni \forall\mu, \mathcal{O}_\lambda \leq \mathcal{O}_\mu$ であって、さらに $\inf\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) = \bigcap_{\mu\in\mathrm{M}}\mathcal{O}_\mu$ である。ここから $\Lambda \ni \forall\lambda$ をとると $\mathcal{O}_\lambda \leq \bigcap_{\mu\in\mathrm{M}}\mathcal{O}_\mu = \inf\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ が成立している。したがって $\inf\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ が成立。さらに $\mathrm{M} \ni \forall\mu, \mathcal{O}_\mu \geq \bigcap_{\mu\in\mathrm{M}}\mathcal{O}_\mu = \inf\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ であるので $\inf\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ の元かつ $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ の中で最弱の位相。//

定理６の主張をまとめると下記のようになる。

・$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) \ni \forall \mathcal{O}, \Lambda \ni \forall \lambda, \mathcal{O}_\lambda \leq \mathcal{O}$

・$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) \ni \inf \mathfrak{S}(\mathfrak{A})$

・$\mathfrak{S}(\mathfrak{A}) \ni \forall \mathcal{O}, \inf \mathfrak{S}(\mathfrak{A}) \leq \mathcal{O}$

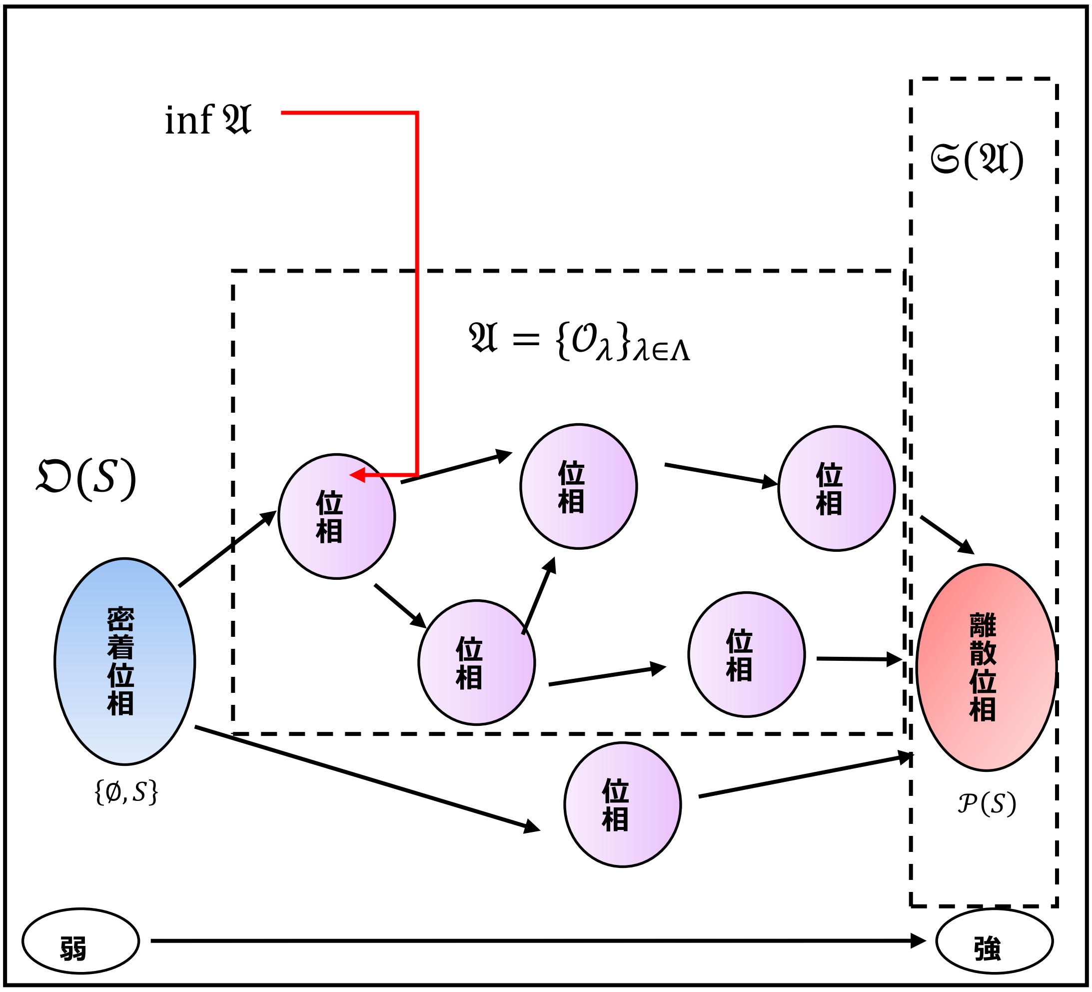
以上において位相の強弱に関する順序関係において $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ の上界、さらに $\inf \mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{A}$ の上限ということがいえる。以上を踏まえ、今後は

$$\sup \mathfrak{A} = \sup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda = \inf \mathfrak{S}(\mathfrak{A}) = \inf\{\mathcal{O} \in \mathcal{P}\left(\mathcal{P}(S)\right) | (S, \mathcal{O})\text{が位相空間かつ} \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda \leq \mathcal{O}\}$$

とかくことを約束する。

（補足）

さて $\mathfrak{O}(S) \supset \forall \mathfrak{A}$ をとると定理４や定理６から $\inf \mathfrak{A}, \sup \mathfrak{A} \in \mathfrak{O}(S)$ がいえる。このように部分集合に必ず上限や下限が存在するような順序集合を完備束という。



<u>位相の生成</u>

先程、位相における上限を再考する。定理６から $\mathfrak{O}(S)\supset\forall\mathfrak{U}$ に対し $\sup\mathfrak{U}$ は $\mathfrak{U}$ の元である開集合系に含まれている開集合を全て含んだ位相で最弱の位相であった。次にさらに一般的にこの状況を考える。

系７（位相の生成）

S 空でない集合

$\mathcal{P}(S)\supset\mathcal{A}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ S の部分集合の集合

$\mathfrak{O}(S)\supset\mathfrak{X}(\mathcal{A})=\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\mid(S,\mathcal{O})\text{が位相空間かつ}\,\mathcal{A}\subset\mathcal{O}\}$

ここで $(S,\inf\mathfrak{X}(\mathcal{A}))$ が位相空間になることは定理６と同様、つまり $\inf\mathfrak{X}(\mathcal{A})\in\mathfrak{O}(S)$

さらに $\inf\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ は $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ の元かつ $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ の中で最弱の位相。

※集合 $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ というかき方も汎用的ではないが、以後使用する。

（証明）

定理６と同様。//

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\forall\mathcal{A}$ に対し系７における $\inf\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ によって生成される位相とよぶ。つまり $\mathcal{A}$ によって生成される位相とは $\mathcal{A}$ を含む最弱の位相。すると $\mathcal{A}$ をとるごとに $\mathcal{A}$ から生成される位相を対応させる写像を考えることができる。便宜的に次で表すことにする。（汎用的な記法ではない。）

$$\mathfrak{s}:\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\mathcal{A}\longmapsto(\mathcal{A}\text{ から生成される位相})\in\mathfrak{O}(S)\subset\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$$

例題８（位相の生成の例）

（１） $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\supset\mathfrak{O}(S)\ni\forall\mathcal{O}$ に対し $\mathfrak{s}(\mathcal{O})=\mathcal{O}$ を証明せよ。

（２） $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\supset\mathfrak{O}(S)\supset\forall\mathfrak{U}=\{\mathcal{O}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し $\mathfrak{s}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda)=\sup\mathfrak{U}$ を証明せよ。

（３） $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\mathcal{A}$ に対し $\mathfrak{s}(\mathfrak{s}(\mathcal{A}))=\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ を証明せよ。

（４） $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ に対して $\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2$ であるならば $\mathfrak{s}(\mathcal{A}_1)\subset\mathfrak{s}(\mathcal{A}_2)$ が成立。

（５） $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\mathcal{A},\mathfrak{O}(S)\ni\mathcal{O}$ に対し $\mathcal{A}\subset\mathcal{O}$ かつ $\mathcal{O}\subset\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ は $\mathfrak{s}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$ と必要十分

（証明）

まず（１）や（２）は定理６から成立。（３）は $\mathfrak{s}(\mathcal{A})\in\mathfrak{O}(S)$ から（１）と併せて成立。（４）は系７の記号を用いれば $\mathfrak{X}(\mathcal{A}_2)\subset\mathfrak{X}(\mathcal{A}_1)$ となることからいえる。（５）は $\mathcal{A}\subset\mathcal{O}$ かつ $\mathcal{O}\subset\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ とすると （３）及び（４）により $\mathfrak{s}(\mathcal{A})\subset\mathcal{O}$ かつ $\mathcal{O}\subset\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ となる。逆に $\mathfrak{s}(\mathcal{A})=\mathcal{O}$ とすれば $\mathfrak{s}(\mathcal{A})\subset\mathcal{O}$ かつ $\mathcal{O}\subset\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ であるが $\mathcal{A}\subset\mathfrak{s}(\mathcal{A})\subset\mathcal{O}$ となるので成立。//

生成された位相の内訳

S 空でない集合
$\mathfrak{O}(S)=\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\mid(S,\mathcal{O})\text{が位相空間となる}\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\mathcal{A}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda},\mathcal{B}=\{B_\mu\}_{\mu\in\mathrm{M}}$ それぞれ集合 S の部分集合を元にもつ集合

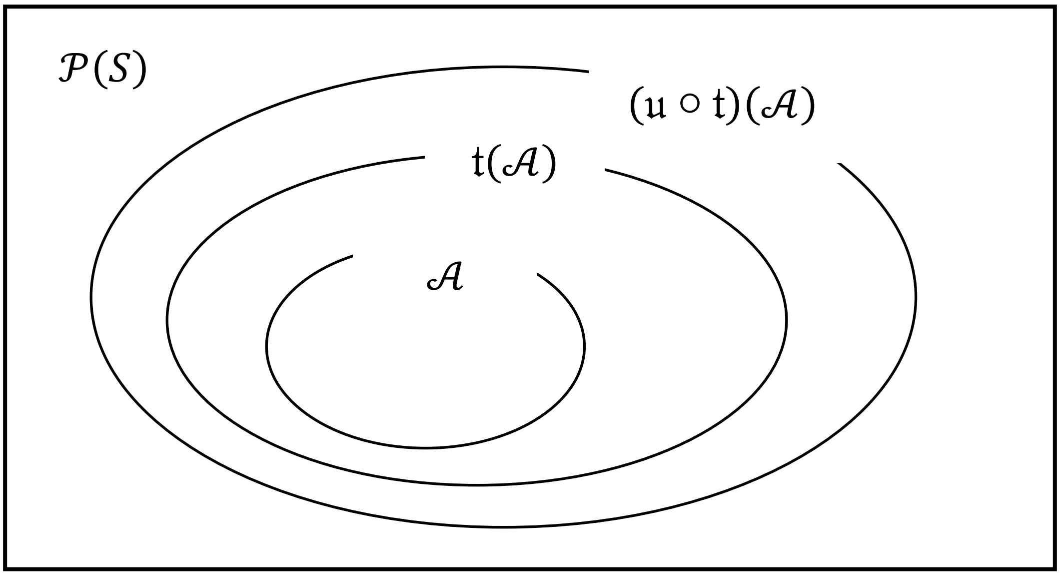
さて上の設定において下記のように２つの写像を考える。（記号は汎用的ではないことに注意。）
$\mathrm{t}:\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\mathcal{A}\mapsto\left\{\bigcap_{t\in T}A_t\mid T\subset\Lambda,T\text{は有限集合}\right\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$
$\mathrm{u}:\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\mathcal{B}\mapsto\left\{\bigcup_{u\in U}B_u\mid U\subset\mathrm{M},U\text{は任意の濃度}\right\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))$

※上記において $T=\emptyset$ のとき $\bigcap_{t\in T}A_t=S$ また $U=\emptyset$ のとき $\bigcup_{u\in U}B_u=\emptyset$ と定義する。

以上を用いて、基底や準基底の定義を与える。まず、上記記号を用いて生成される位相の内訳について調べる。ところで写像 t には下記性質がある。

例題９（定めた写像の性質）
（１） $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\mathcal{A}$ に対し $\mathrm{t}(\mathrm{t}(\mathcal{A}))=\mathrm{t}(\mathcal{A})$ を証明せよ。
（２） $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2$ に対して $\mathcal{A}_1\subset\mathcal{A}_2$ であるならば $\mathrm{t}(\mathcal{A}_1)\subset\mathrm{t}(\mathcal{A}_2)$ が成立。
（３） $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\mathcal{A},\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}=\mathrm{t}(\mathcal{B})$ かつ $\mathcal{B}\subset\mathrm{t}(\mathcal{A})$ は $\mathrm{t}(\mathcal{A})=\mathcal{B}$ と必要十分

（証明）
まず（１）は明らか。実際 $\mathrm{t}(\mathcal{A})$ の有限個の元の和集合は $\mathcal{A}$ の有限個の元の和集合でかけるから $\mathrm{t}(\mathrm{t}(\mathcal{A}))\subset\mathrm{t}(\mathcal{A})$ がわかる。さらに $\mathrm{t}(\mathrm{t}(\mathcal{A}))\supset\mathrm{t}(\mathcal{A})$ は t の定義により明らか。（２）に関しては t の定義により明らか。（３）に関しては（１）（２）により例題８（５）と同様にわかる。//



定理 10（生成される位相の内訳）

写像に関して $\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t}=\mathfrak{s}$ が成立する。いいかえれば $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\forall\mathcal{A}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が生成する位相の開集合系は $\left\{\bigcap_{t\in T}A_t \,\middle|\, T\subset\Lambda, T\text{ は有限集合}\right\}$ に含まれる元の和集合を元にもつ集合。

（証明）

まず $\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))\ni\forall\mathcal{A}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})\in\mathfrak{O}(S)$ を示す。ここで簡単のために $\{\bigcap_{t\in T}A_t \mid T\subset\Lambda\}=\{B_\mu\}_{\mu\in\mathrm{M}}$ とかくことにする。

（O1）

$T=\emptyset$ のとき $\bigcap_{t\in T}A_t=S$ となるので $\mathfrak{t}(\mathcal{A})\ni S$ となる。したがって $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})\ni S$ が成立。また $U=\emptyset$ のとき $\bigcup_{u\in U}B_u=\emptyset$ となるので $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})=\mathfrak{u}(\mathfrak{t}(\mathcal{A}))\ni\emptyset$ が成立。

（O2）

$(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})\ni O_1,O_2$ とする。それぞれ $\mathfrak{u}(\mathfrak{t}(\mathcal{A}))$ の元であるから

$$\exists U_1\subset\mathrm{M},\bigcup_{u_1\in U_1}B_{u_1}=O_1\ (B_{U_1}\in\mathfrak{t}(\mathcal{A}))$$

$$\exists U_2\subset\mathrm{M},\bigcup_{u_2\in U_2}B_{u_2}=O_2\ (B_{U_2}\in\mathfrak{t}(\mathcal{A}))$$

となるので $O_1\cap O_2=\left(\bigcup_{u_1\in U_1}B_{u_1}\right)\cap\left(\bigcup_{u_2\in U_2}B_{u_1}\right)=\bigcup_{u_1\in U_1,u_2\in U_2}\left(B_{u_1}\cap B_{u_2}\right)$ であるが $U_1\ni\forall u_1,U_2\ni\forall u_2$ に対して $B_{u_1},B_{u_2}\in\mathfrak{t}(\mathcal{A})$ であるので $B_{u_1}\cap B_{u_2}\in\mathfrak{t}(\mathcal{A})$ が成立。実際

$$\exists T_1\subset\Lambda,\bigcap_{t\in T_1}A_t=B_{u_1}\left(A_t\in\mathcal{A},T_1\text{ は有限集合}\right)$$

$$\exists T_2\subset\Lambda,\bigcap_{t\in T_2}A_t=B_{u_2}\left(A_t\in\mathcal{A},T_2\text{ は有限集合}\right)$$

T_1,T_2 が共に有限集合であるから $B_{u_1}\cap B_{u_2}=\left(\bigcap_{t\in T_1}A_{t_1}\right)\cap\left(\bigcap_{t\in T_2}A_{t_2}\right)=\bigcap_{t\in T_1\cup T_2}A_t\in\mathfrak{t}(\mathcal{A})$ がわかる。以上より $O_1\cap O_2=\bigcup_{u_1\in U_1,u_2\in U_2}\left(B_{u_1}\cap B_{u_2}\right)\in\mathfrak{u}\left(\mathfrak{t}(\mathcal{A})\right)=(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})$ となる。

（O3）

$(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})\supset\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ をとる。$A\ni\forall\alpha$ に対して O_α は $\mathfrak{u}(\mathfrak{t}(\mathcal{A}))$ の元であるから

$$\exists U_\alpha\subset\mathrm{M},\bigcup_{u\in U_\alpha}B_u=O_\alpha\ (B_u\in\mathfrak{t}(\mathcal{A}))$$

となるので $\bigcup_{\alpha\in A}O_\alpha=\bigcup_{\alpha\in A}\left(\bigcup_{u\in U_\alpha}B_u\right)=\bigcup_{\alpha\in A,u\in U_\alpha}B_u\in\mathfrak{u}\left(\mathfrak{t}(\mathcal{A})\right)=(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})$ がわかる。

また $\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t}$ の写像の決め方から $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})\supset\mathcal{A}$ となるので系 7 の記号を用いれば $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})\in\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ となる。最後に $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})$ が $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ の中で最弱の位相であることを証明する。$\mathfrak{X}(\mathcal{A})\ni\forall\mathcal{O}$ をとる。このとき $\mathcal{O}\supset\mathcal{A}$ である。$\mathcal{O}$ は（O2）の条件により $\mathcal{O}\supset\mathfrak{t}(\mathcal{A})$ がわかる。さらにその上で $\mathcal{O}$ は（O3）の条件を満たすので $\mathcal{O}\supset(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})$ がわかる。以上により $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})$ が $\mathfrak{X}(\mathcal{A})$ の中で最弱の位相。つまり $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{A})=\mathfrak{s}(\mathcal{A})$ となる。//

基底・準基底

特殊な写像などの記号は直前と同じとする。

S 空でない集合

$\mathfrak{O}(S)=\{\mathcal{O}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))|(S,\mathcal{O})\text{が位相空間となる}\}$

$\mathcal{P}(S)\supset\mathfrak{O}(S)\ni\mathcal{O}$

$$\mathcal{O}\supset\mathcal{U}\text{ が基底}\Leftrightarrow\mathfrak{u}(\mathcal{U})=\mathcal{O}$$

$$\mathcal{O}\supset\mathcal{W}\text{ が準基底}\Leftrightarrow\mathfrak{s}(\mathcal{W})=\mathcal{O}\Leftrightarrow(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{W})=\mathcal{O}$$

基底であることは例題８（５）を用いれば次のように表現できる。$\mathcal{O}\supset\mathcal{U}$ が基底 $\Leftrightarrow\mathcal{O}\supset\mathcal{U}$ かつ $\mathcal{O}\ni\forall O,\mathcal{U}\supset\exists\mathcal{A},O=\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A\Leftrightarrow\mathcal{O}\supset\mathcal{U}$ かつ $\mathcal{O}\ni\forall O\ni\forall x,\mathcal{U}\ni\exists A,x\in A\subset O$ となる。

例題 11（基底・準基底の例）

次のそれぞれを証明せよ。

（１）$\mathbb{R}^n$ の開球体全体は Euclid 位相 $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ の基底（２－１の定理５）

（２）$\mathbb{R}$ の開区間全体は Euclid 位相 $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ の基底

（３）$\mathbb{R}$ の半開区間全体は Euclid 位相 $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ の準基底

（４）$\mathbb{R}^n$ の中心の成分と半径がそれぞれ有理数である開球体全体は Euclid 位相 $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ の基底

（証明）

（１）

２－１の定理５で証明した。

（２）

$\mathbb{R}$ の開球体全体を $\mathcal{U}_1$ とし、$\mathbb{R}$ の開区間全体を $\mathcal{U}_2=\{(a\ b)|a,b\in\mathbb{R},a<b\}$ とする。$\mathcal{O}(\mathbb{R})\ni\forall O$ をとり、さらに $O\ni\forall x$ をとると（１）より $\mathcal{O}(\mathbb{R})=\mathfrak{u}(\mathcal{U}_1)$ であるから $\mathcal{U}_1\ni\exists B,x\in B\subset O$ である。ここで B は開球体なので $\exists y\in\mathbb{R},\exists\varepsilon>0,B=B(y;\varepsilon)=(y-\varepsilon\ y+\varepsilon)\in\mathcal{U}_2$ となる。つまり

$$\mathcal{O}(\mathbb{R})\ni\forall O\ni\forall x,\mathcal{U}_2\ni\exists B,x\in B\subset O$$

さらに２－１の例題２で開区間が開集合であることは証明しており $\mathcal{O}(\mathbb{R})\supset\mathcal{U}_2$ である。以上により $\mathfrak{u}(\mathcal{U}_2)=\mathcal{O}(\mathbb{R})$ が成立し $\mathcal{U}_2$ は $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ の基底。

（３）

（２）に引き続き $\mathbb{R}$ の開区間全体を $\mathcal{U}_2$ とし、$\mathbb{R}$ の半開区間全体を $\mathcal{W}$ として $\mathfrak{t}(\mathcal{W})\supset\mathcal{U}_2$ を証明する。$\mathcal{U}_2\ni\forall A$ をとる。このとき $\exists a\in\mathbb{R},\exists b\in\mathbb{R},a<b,A=(a\ b)$ となる。ところで $A=(-\infty\ b)\cap(a\ \infty)\in\mathfrak{t}(\mathcal{W})$ となる。以上により $\mathfrak{t}(\mathcal{W})\supset\mathcal{U}_2$ であるから例題８（４）により $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{W})\supset\mathfrak{u}(\mathcal{U}_2)=\mathcal{O}(\mathbb{R})$ である。ところで $\mathcal{W}\subset\mathcal{O}(\mathbb{R})$ かつ（O2）の条件から $\mathfrak{t}(\mathcal{W})\subset\mathcal{O}(\mathbb{R})$ であり、さらに（O3）の条件により $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{W})\subset\mathcal{O}(\mathbb{R})$ ともなる。以上をあわせて $(\mathfrak{u}\circ\mathfrak{t})(\mathcal{W})=\mathcal{O}(\mathbb{R})$ が成立。

（４）
$\mathbb{R}^n$ の中心の成分と半径がそれぞれ有理数かつ開球体全体を $\mathcal{U}_3$ とする。$\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \ni \forall O$ をとり、さらに $O \ni \forall x$ をとると $x \in O^{\circ}$ であるから $\exists \varepsilon > 0, B(x;\varepsilon) \subset O$ となる。まず $0 < p < \varepsilon/2$ となる $\mathbb{Q} \ni p$ が存在する。さらに $x = (x_1\ x_2\ x_3 \dots x_n)$ と成分表示し $\delta = p/\sqrt{n}$ として $C = (x_1 - \delta\ x_1 + \delta) \times (x_2 - \delta\ x_2 + \delta) \times \dots (x_n - \delta\ x_n + \delta)$ とする。このとき $C \ni \forall z, \mathrm{d}(x\ z) < p$ が成立している。特に $C \ni x$ でもある。さらに先程と同様に $\{1,2,\dots,n\} \ni \forall i, \exists q_i \in (x_i - \delta\ x_i + \delta) \cap \mathbb{Q}$ である。改めて $q = (q_1\ q_2\ q_3 \dots q_n)$ とすれば $C \ni q$ でもある。すると $\mathrm{d}(x\ q) < p$ と $q \in \mathbb{Q}^n$ であって

$$x \in \underline{B(q;p) \subset B(x;\varepsilon)} \subset O$$

以上から $\mathcal{O} \ni \forall O \ni \forall x, \mathcal{U}_3 \ni \exists B, x \in B \subset O$ がいえる。さらに $\mathcal{U}_3$ は開球体全体の部分集合であって、特に $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ の部分集合。以上をあわせて $\mathfrak{u}(\mathcal{U}_3) = \mathcal{O}(\mathbb{R})$ が成立し $\mathcal{U}_3$ は $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ の基底。

※傍線部の証明
$B(q;p) \ni \forall y$ をとると $\mathrm{d}(q\ y) < p$ かつ $\mathrm{d}(x\ q) < p$ であるから三角不等式により

$$\mathrm{d}(x\ y) \leq \mathrm{d}(x\ q) + \mathrm{d}(q\ y) < p + p < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

となるから $y \in B(x;\varepsilon)$ となる。

定義１（第２可算公理）
位相空間において、可算な基底がとれるとき、その位相空間は第 2 可算公理を満たす、という。

例題 13（第２可算公理を満たす例）
Euclid 位相は第 2 可算公理を満たす。

（証明）
例題 11（４）を用いると Euclid 位相では中心の成分と半径がそれぞれ有理数である開球体全体が基底としてとれる。有理数は可算で n次元の Euclid 位相を考えれば、この基底は $n+1$ 個の有理数を並べたものと濃度は同じであるから可算。//

基本近傍系

開集合は基底の元の和集合でかけるので、開集合の問題を論じる場合に基底の問題に帰着することができる。同様にして、近傍系は基本近傍系の元の和集合でかける。

S 空でない集合
$S \ni x$
$\mathcal{P}(S) \ni \mathcal{O}$ が S に位相構造を定めている
$\mathcal{V}_x$ x の近傍系

$$\mathcal{V}_x \supset \mathcal{V}_x^* \text{ が基本近傍系} \Leftrightarrow \mathcal{V}_x \supset \mathcal{V}_x^* \text{ かつ } \mathcal{V}_x \ni \forall V, \mathcal{V}_x^* \ni \exists U, U \subset V$$

ここで基本近傍系であることは $\mathfrak{u}(\mathcal{V}_x^*) = \mathcal{V}_x$ まで要請していないことに注意する。

例題 14（基本近傍系の例）
$\mathcal{V}_x$ x の近傍系
$\mathcal{O} \supset \mathcal{V}_x^* = \{U \in \mathcal{O} | x \in U\}$ は基本近傍系となる

（証明）
まず $\mathcal{V}_x \supset \mathcal{V}_x^*$ である。実際 $\mathcal{V}_x^* \ni \forall U$ をとると $U \in \mathcal{O}$ かつ $x \in U$ である。すると $x \in U = U^\circ$ となるので近傍系の定義により $U \in \mathcal{V}_x$ であるから $\mathcal{V}_x \supset \mathcal{V}_x^*$ が成立。次に $\mathcal{V}_x \ni \forall V$ をとる。すると $x \in V^\circ \subset V$ である。ここで $V^\circ \in \mathcal{O}$ でもあるから $V^\circ \in \mathcal{V}_x^*$ となる。したがって $\mathcal{V}_x \ni \forall V, \mathcal{V}_x^* \ni \exists U, U \subset V$ が成立している。以上を踏まえて $\mathcal{V}_x^*$ は $\mathcal{V}_x$ の基本近傍系。//

※なお $\mathcal{V}_x^* = \{U \in \mathcal{O} | x \in U\}$ を基本開近傍系といい、この元を開近傍という。

定義 2（第 1 可算公理）
位相空間の任意の元において、可算な基本近傍系がとれるとき、その位相空間は第 1 可算公理を満たす、という。

定理 15（第 1 可算公理と第 2 可算公理）
第 2 可算公理を満たす位相空間は第 1 可算公理を満たす。

（証明）
第 2 可算公理を満たす位相空間 $(S, \mathcal{O})$ をとる。このとき可算な基底として $\mathcal{O} \supset \mathcal{U}$ がとれる。ここで $\mathcal{U} \supset \{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\} = \mathcal{V}$ とすると $\mathcal{V}$ は可算かつ x の基本近傍系になるので第 1 可算公理を満たす。実際 $S \ni \forall x$ をとる。$\mathcal{V}_x \ni \forall V$ をとると $x \in V^\circ \in \mathcal{O}$ であるから $\mathcal{U}$ が基底であることに注意して $\exists U \in \mathcal{V}, x \in U \subset V^\circ \subset V$ となる。//

稠密と可分

S 空でない集合

$\mathcal{P}(S) \ni \mathcal{O}$ が S に位相構造を定めている

$$S \supset M \text{ が } S \text{ において稠密} \Leftrightarrow \bar{M} = S$$

$$S \text{ が可分} \Leftrightarrow \exists M \subset S, \bar{M} = S \text{ かつ } M \text{ は可算}$$

例題 16（稠密と可分の例）

（１） $S \supset M$ が S において稠密 $\Leftrightarrow (M^{c})^{\circ} = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{O} \ni \forall O, O \cap M \neq \emptyset$

（２） $\mathbb{R}^n \supset \mathbb{Q}^n$ は Euclid 位相において稠密であり、Euclid 位相は可分

（証明）

（１）

下記のように同値変形できる。

$S \supset M$ が S において稠密 $\Leftrightarrow (\bar{M})^{c} = \emptyset \Leftrightarrow (M^{c})^{\circ} = \emptyset \Leftrightarrow M^{c}$に含まれる開集合は存在しない

$\Leftrightarrow \neg(\mathcal{O} \ni \exists O, O \subset M^{c}) \Leftrightarrow \mathcal{O} \ni \forall O, O \cap M \neq \emptyset$

（２）

例題 11（４）の証明内の事実により $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n) \ni \forall O$ に対して、さらに $O \ni x$ をとると

$$\exists p \in \mathbb{Q}, \exists q \in \mathbb{Q}^n, x \in B(q;p) \subset O$$

特に $q \in B(q;p) \cap \mathbb{Q}^n \subset O \cap \mathbb{Q}^n$ である。以上により（１）を用いて $\mathbb{R}^n \supset \mathbb{Q}^n$ は Euclid 位相において稠密。さらに $\mathbb{Q}^n$ は可算集合であるので Euclid 位相は可分。//

2－4のまとめ

（位相の強弱）

・同じ集合でも様々な位相を考えることができる。

・位相の開集合系に含まれる開集合が多ければ多いほど、強い位相

・同じ集合上で最弱の位相は**密着位相**、最強の位相は**離散位相**

・特定の条件を満たす位相の下限位相は全ての開集合系の共通集合を開集合系で定義

（→　**共通集合が開集合系の条件を満たす**ことに注意）

・特定の条件を満たす位相の上限位相は全ての開集合系の和集合を含む位相の下限

（→　必ずしも**和集合が開集合系の条件を満たすとは限らない**ことに注意）

・同じ集合上の位相の順序集合を考えると、完備束

（基底・準基底）

・特殊な写像の記号を用いて、基底・準基底を定義した

・開集合は**基底の元の和集合**でかけるので、基底の性質を調べれば位相の性質がわかる

・開集合は**準基底の元の有限個の共通集合からなる集合の和集合でかける**ので、準基底の性質を調べれば位相の性質がわかる

（基本近傍系）

・基本近傍系の元は近傍に含まれる

（第２可算公理・第１可算公理）

・**第２可算公理**を満たすとは、基底が可算であること

・**第１可算公理**を満たすとは、任意の点における近傍系が可算であること

・第２可算公理を満たすならば、第１可算公理を満たす

・Euclid 空間は、第２可算公理を満たす

（この証明には基底として、**中心の成分と半径が共に有理数**の ε球の集合がとれることを使った）

・明らかな帰結として Euclid 空間は、第１可算公理を満たす

・なお、Euclid 空間を一般化した距離空間は第１可算公理を満たす。

（この証明には近傍系として、**半径が有理数**の ε球の集合がとれることを使う）

（稠密と可分）

・ある位相で集合が稠密とは閉包をとれば、位相の台の集合になること

・可分とは可算かつ稠密な集合がとれること

・Euclid 空間は可分

（Euclid 空間で**成分が有理数のものの集合**が稠密であることから成立した。）